UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ

Luciana de Lima

A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DO CONCEITO DE FUNÇÃO NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Fortaleza – Ceará

2008

Universidade Estadual do Ceará

Luciana de Lima

A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DO CONCEITO DE FUNÇÃO NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Educação da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Educação. Área de Concentração em Formação de Professores.

Orientadora: Profa. Dra. Maria Gilvanise de Oliveira Pontes

Fortaleza – Ceará

2008

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ

Curso de Mestrado Acadêmico em Educação

TÍTULO DO TRABALHO: A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DO CONCEITO DE FUNÇÃO NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

AUTORA: Luciana de Lima

Defesa em: 24 / 03 / 2008 Nota obtida: 10,0

Banca Examinadora

Profa. Dra. Maria Gilvanise de Oliveira Pontes (Presidente)

Centro de Educação/CED/UECE

Prof. Dr. José Aires de Castro Filho (Avaliador Externo)

Depto. de Fundamentos da Educação/FACED/UFC

Profa. Dra. Rogéria Gaudêncio do Rego (Avaliador Externo)

Depto. de Matemática/CCEN/UFPB

Prof. Dr. Júlio Wilson Ribeiro (Suplente)

Depto. de Computação/UFC

A minha querida filha
Isabella, presente de Deus, luz dos
meus caminhos.

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, professora Dra.Maria Gilvanise de Oliveira Pontes, pela disponibilidade, acessibilidade e facilidade de comunicação.

Aos professores Dr. José Aires de Castro Filho, Dra. Rogéria Gaudêncio do Rêgo e Dr. Júlio Wilson Ribeiro por aceitarem compor a banca examinadora e contribuírem enormemente para a melhoria do trabalho.

À professora Dra. Rita de Cássia Barbosa Paiva Magalhães por ter contribuído, nas disciplinas e na qualificação, com colocações pertinentes para a pesquisa.

À professora Ms. Natália Barroso por auxiliar na leitura do texto, na escrita do trabalho e nas definições matemáticas.

Ao prof. Dr. Ronaldo Ramos pelo apoio e suporte técnicos.

Aos professores Ms. Aluísio Cabral de Lima e Luíza Pontello pelo auxílio e plena disponibilidade na aplicação inicial da pesquisa.

Ao professor Luciano Moura Cavalcante por permitir o desenvolvimento da pesquisa e ao professor José Maildo Nunes por auxiliar no desenvolvimento inicial das atividades na UECE.

Aos alunos voluntários do CEFETCE e da UECE que participaram ativamente da pesquisa e contribuíram de forma relevante para o desenvolvimento deste trabalho.

A todos os colegas do Curso de Mestrado em Educação da UECE, parceiros de momentos árduos e inesquecíveis.

Ao meu esposo João Andrade e à minha filha Isabella, pela compreensão, apoio e carinho. À minha mãe Mara Hilzete Lima pela força e pensamentos positivos de sempre.

RESUMO

A dissociação dos conteúdos disciplinares, a supervalorização da aprendizagem dos procedimentos em detrimento da aprendizagem dos conceitos e o pouco aprofundamento no estudo de conhecimentos voltados para a educação básica são problemas que contribuem para uma formação inicial inadequada do professor de matemática. O estudo do conceito de função, mesmo sendo considerado pelos estudiosos da área como um conceito de extrema importância pela sua vasta utilização em situações da vida cotidiana e científica, ainda é um conceito pouco estudado na formação docente. Tanto alunos quanto professores apresentam dificuldade em conceituar esse saber matemático e utilizá-lo adequadamente. A proposta do presente trabalho é descrever como os licenciandos em matemática da UECE ressignificam o conceito de função diante de uma aprendizagem significativa baseada nos pressupostos teóricos de Ausubel. A pesquisa realizada entre maio e outubro de 2007, caracteriza-se como um Estudo de Caso. A metodologia utilizada se subdivide em duas etapas: Levantamento e Intervenção. Na 1ª etapa busca-se a compreensão dos conhecimentos prévios apresentados pelos alunos sobre o conceito de função e seus conceitos subjacentes com a aplicação de entrevistas e questionários. Na 2ª etapa são desenvolvidas 22 sessões com média de 67 minutos para cada intervenção, totalizando 11 semanas de trabalho. A meta para esta etapa é descrever como os alunos se estruturam mentalmente para ressignificar o conceito de função utilizando principalmente os conceitos teóricos de Dirichlet, século XIX, e de Lages Lima (1998). A estruturação desta etapa subdivide-se em três fases e se baseia nos Princípios Programáticos de Ausubel: Diferenciação Progressiva e Reconciliação Integradora, Organização Seqüencial e Consolidação. Na 1ª fase os alunos discutem além do conceito de função, os conceitos de equação, expressão algébrica, variável, incógnita, domínio, contradomínio e imagem. Na 2ª fase, desenvolvem mapas conceituais para organizar e relacionar o conceito de função a seus conceitos subjacentes. Na 3ª fase, aplicam o conceito de função em resoluções de problema. Dos quatro alunos que participam da pesquisa, apenas dois estão sendo analisados de forma interpretativa. A análise dos dados segue o princípio da Assimilação preconizada por Ausubel e utiliza como estratégia a triangulação de fonte de dados e a triangulação metodológica. Na etapa do Levantamento é possível perceber as dificuldades e contradições apresentadas pelos alunos ao definirem o conceito de função. Essas dificuldades se tornam ainda mais presentes na etapa da Intervenção, em especial, na relação entre os conceitos de função, contradomínio e imagem. A Diferenciação Progressiva e a Reconciliação Integradora são princípios que auxiliam no desenvolvimento da capacidade de questionamento e reflexão sobre o conceito de função e seus conceitos subjacentes. O desenvolvimento dos mapas conceituais contribui com maior detalhamento dessas relações previamente estabelecidas, por meio da organização hierárquica do conhecimento adquirido. O processo de ressignificação conceitual modifica os conceitos prévios dos alunos sobre o conceito de função sem a necessidade de memorização dos novos conceitos, estimula a reflexão e a análise de suas elaborações mentais, possibilitando um processo contínuo de auto-avaliação. Essas modificações também se refletem na visão pedagógica da pesquisadora que compreende a necessidade da valorização dos conhecimentos prévios dos alunos e do ensino de conceitos matemáticos.

Palavras-chave: educação matemática, conceito de função, aprendizagem significativa.

ABSTRACT

The disassociation of the educational content, the undue importance given to learning procedures, to the detriment of concepts, and the shallowness of studies focusing on basic education are problems which contribute to the inadequate training of math teachers. The study of the concept of function, even though considered by experts as being of great importance, due to its wide use in everyday situations and for scientific purposes, is as yet little used in forming teachers. Students and teachers have problems in this field of mathematical knowledge. This study's objective is to describe how UECE's math graduates understand the concept of function, in face of significant learning based on Ausubel's theoretical presuppositions. The research, undertaken from May, 2007 to October, 2007, is characterized as Case Study. The used methodology subdivides in 2 stages: Data Collection and Intervention. In the first stage, an understanding is sought of the students' prior knowledge regarding the concept of function and subjacent concepts, in interviews and questionnaires. In the second stage, 22 sessions are developed with average of 67 minutes for each intervention, totaling 11 weeks of work. The goal for this stage is to describe how the students are structured mentally to understand the concept of function, using Dirichlet's (19^{th} century) and Lages Lima's (1998) theoretical concepts. Their structuring is subdivided in three phases, based on Ausubel's programmatic principles: Progressive Differentiation and Integrating Reconciliation, Sequential Organization, and Consolidation. During the first phase the students discuss the concept of function, as well as the concepts of equation, algebraic expression, variation, unknown quantity, domain, counter-domain and image. During the second phase, conceptual maps are developed to organize and list the concept of function and the subjacent concepts. In the third phase the concept of function is applied to problem solving. Of the four students participating in the research, only two are being analyzed in an interpretative manner. The analysis of the data follows the principle of Assimilation proposed by Ausubel and it uses the strategies of data source triangulation and methodological triangulation. In the stage of the Data Collection it is possible to notice the difficulties and contradictions presented by the students to define the function concept. Those difficulties become still more presents in the stage of the Intervention, especially, in the relationship among the concept of function, counter-domain and image. The Progressive Differentiation and the Integrating Reconciliation are beginnings that aid in the development of the asking capacity and reflection on the concept of function and their subjacent concepts. The development of the conceptual maps contributes with larger comprehension of those relationships previously established, through the hierarchical organization of the acquired knowledge. The process of conceptual comprehension modifies the students' prior concepts of function without the need to memorize new concepts and stimulates reflection and the analysis of intellectual development, making possible a continuous process of self-evaluation. Those modifications are also reflected in the researcher's pedagogic vision that understands the need of the valorization of the students' previous knowledge and of the teaching of mathematical concepts.

Key Words: math education, concept of function, significant learning.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Tipos de Saberes na Formação Docente de Shulman	24
Figura 2	Tipos de Saberes na Formação Docente de Gauthier	26
Figura 3	Tipos de Saberes na Formação Docente de Darling-Hammond e Baratz-Snowden	26
Figura 4	Modelo do processo de assimilação da Aprendizagem Significativa de Ausubel	64
Figura 5	Esquema gráfico dos Princípios Programáticos da Aprendizagem Significativa de Ausubel	66
Figura 6	Esquema gráfico da estrutura dos mapas conceituais	69
Figura 7	Estrutura da Metodologia da pesquisa	75
Figura 8	Situação A do Questionário Aplicado – Parte 1	94
Figura 9	Situação B do Questionário Aplicado – Parte 1	94
Figura 10	Situação C do Questionário Aplicado – Parte 1	95
Figura 11	Construção do Mapa Conceitual de função – grupo GATO	121
Figura 12	Construção do Mapa Conceitual de função – grupo PEIXE	122
Figura 13	Mapa Conceitual de Função – grupo GATO	125
Figura 14	Mapa Conceitual de Função – grupo PEIXE	127
Figura 15	Triângulos dispostos em palitos	128

LISTA DE QUADROS

Quadro 1	Etapa da Intervenção	102
Quadro 2	Problemas da Intervenção 9	104
Quadro 3	Problemas da Intervenção 11.....	113
Quadro 4	Resumo das definições apresentadas pelos alunos GATO e PEIXE	

nas Entrevistas e nos Questionários 143
Quadro 5 Resumo das definições apresentadas pelos alunos GATO e PEIXE nas intervenções 145

LISTA DE SIGLAS

CEFETCE	-	Centro Federal de Educação Tecnológica do Ceará
CESAT	-	Centro de Ensino Superior Anísio Teixeira
FAPESP	-	Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo
FUNEDUCE	-	Fundação Educacional do Estado do Ceará
PCNEM	-	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
PUC/RJ	-	Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
PUC/SP	-	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
REDIN	-	Recursos Digitais Interativos
SIPEM	-	Simpósio de Pesquisa em Educação Matemática
UECE	-	Universidade Estadual do Ceará
UFPB	-	Universidade Federal da Paraíba
UFRGS	-	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFRN	-	Universidade Federal do Rio Grande do Norte

SUMÁRIO

RESUMO 6
ABSTRACT 7
LISTA DE FIGURAS 8
LISTA DE QUADROS 9
LISTA DE SIGLAS 10
INTRODUÇÃO 14

1. A FORMAÇÃO DE PROFESSORES 20
1.1. O Conceito de Formação e a Formação Inicial de Professores 20
1.2. Os saberes na Formação Docente 22
1.3. Tipos de Saberes na Formação Docente 24
1.4. A Aprendizagem docente 27
2. OS SABERES NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA .. 30
2.1. A evolução histórica da Formação dos Professores de Matemática no Brasil 31
2.2. As pesquisas Internacionais sobre a Formação do Professor de Matemática: perspectiva histórica 35
2.3. As pesquisas Nacionais sobre a formação do professor de Matemática: perspectiva histórica 38
2.4. As concepções dos licenciandos sobre o saber matemático 42
3. O CONCEITO DE FUNÇÃO: SABER ESPECÍFICO NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA 45
3.1. As dificuldades na compreensão do conceito de função 46
3.2. Aspectos teóricos enfatizados do conceito de função na formação inicial do professor de Matemática 53
3.3. Como os aspectos teóricos podem ser abordados no processo de aprendizagem do conceito de função 56
4. A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA 60
4.1. A Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel 60
4.2. A Teoria dos Mapas Conceituais de Novak 68
5 O PERCURSO METODOLÓGICO E A ETAPA DO LEVANTAMENTO . 73
5.1. O percurso metodológico 73
5.2. Os primeiros momentos da pesquisa 79
5.2.1. O Estudo Piloto 79
5.2.2. A Estrutura do Curso de Licenciatura em Matemática da UECE em 2007.1 81
5.2.3. Os primeiros contatos com a turma do Curso de Licenciatura em Matemática da UECE de 2007.1 83
5.3. As Entrevistas 83
5.3.1. A Entrevista com o Professor de Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral I 84
5.3.2. A entrevista com o aluno GATO 85
5.3.3. A entrevista com o aluno PEIXE 87
5.4. Os Questionários 89
5.4.1. O Questionário Teórico do aluno GATO 90
5.4.2. O Questionário Teórico do aluno PEIXE..... 92
5.4.3. O Questionário Aplicado do aluno GATO..... 93
5.4.4. O Questionário Aplicado do aluno PEIXE..... 96
6. A ETAPA DAS INTERVENÇÕES 99
6.2. Intervenção 9 – O conceito de função e as condições de existência e

unicidade 103
6.3. Intervenção 11 – Os conceitos modernos de função – Elon Lages Lima e Geraldo Ávila 110
6.4. Intervenção 14 – Os mapas conceituais sobre o conceito de função 119
6.5. Intervenção 18 – Problema 1 – Função e Progressão Aritmética 128
6.6. Intervenção 22 – A auto-avaliação e a ressignificação do conceito de função 134
CONSIDERAÇÕES FINAIS 142
REFERÊNCIAS 150
APÊNDICES 155
APÊNDICE I Roteiro de Entrevista com professor 155
APÊNDICE II Roteiro de Entrevista com alunos 156
APÊNDICE III Transcrições das Entrevistas 158
APÊNDICE IV Questionários Teórico e Aplicado 171
APÊNDICE V Respostas dos questionários 174
APÊNDICE VI Transcrições das Intervenções 182
APÊNDICE VII Respostas dos protocolos 210
APÊNDICE VIII Descrição e Análise das demais Intervenções 229
ANEXOS 313
ANEXO I Grade Curricular do Curso de Licenciatura em Matemática semestre 2007.1 313
ANEXO II Ementa da disciplina de Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral I ofertada em 2007.1 314

INTRODUÇÃO

A formação da pesquisadora como professora de Matemática é do início da década de 90. Na época, a única distinção entre Licenciatura e Bacharelado estava nas disciplinas consideradas "humanas": Didática, Estrutura e Funcionamento do Ensino, Psicologia da Aprendizagem e do Desenvolvimento, Práticas de Ensino I e II, dos últimos semestres do curso de Licenciatura.

Obteve muitas informações sobre Matemática, outras sobre como o aluno aprende, como se deve ensinar, nenhuma de esclarecimento de como ensinar Matemática especificamente. Sua formação fica partida e polarizada. Ultrapassar o abismo que separa a Matemática da educação continua sendo uma busca pessoal.

Na experiência em sala de aula, percebeu que a aprendizagem da Matemática é um processo profundo e complexo. Saber Matemática não garante que, na relação ensino-aprendizagem, o aluno também compreenda e internalize os conteúdos. Verifica-se que a prática não acontece sem a teoria, e esta sem aquela.

Na busca da formação continuada, procura, com maior profundidade, encontrar elementos de explicação da formação de professores, de como ela acontece na história brasileira, e quais os elementos necessários à formação do professor de Matemática que aproximam os conteúdos matemáticos dos educacionais.

Autores dedicados ao estudo dessa formação contribuem com informações relevantes acerca dos problemas que enfrentam as instituições promotoras da formação docente.

Tardif (2002) revela que, na formação de professores, existe a preocupação com o ensino das teorias concebidas, sem nenhuma relação com o ensino nem com a realidade da vida cotidiana do ofício do professor. As disciplinas geralmente não se relacionam entre si. Constituem unidades independentes, fechadas e de curta duração, causando pouco impacto nos alunos.

Na maioria das instituições, os alunos passam grande parte da formação assistindo às aulas para, em seguida, estagiar e aplicar os conhecimentos. Só então começam a trabalhar sozinhos, aprendendo na prática e passam a constatar que os conhecimentos disciplinares lhes são pouco úteis.

Tardif (2002) conclui que o modelo de formação de professores, modelo aplicacionista do conhecimento, ao tratar os licenciandos como "espíritos virgens", sem considerar suas crenças e representações anteriores, acaba por não modificá-las. Forma

profissionais despreparados para a atuação em sala de aula, proporcionando um ensino de baixa qualidade.

Na formação do professor de matemática, os problemas também se fazem presentes. Nos cursos de Licenciatura, até a década de 90, as disciplinas específicas são cursadas, nos três primeiros anos e as disciplinas pedagógicas ministradas nos últimos anos da graduação, seguida do estágio supervisionado. A dissociação entre Licenciatura e Bacharelado não é única, nestas, observa-se que as disciplinas são cursadas separadamente, sem interconexões entre conhecimentos algébricos, geométricos e aritméticos.

O ensino polarizado converge para o surgimento de novos problemas. Os procedimentos matemáticos são mais valorizados do que os conceitos que os embasam. O licenciando exerce o papel de aluno na maior parte das disciplinas, não desenvolvendo a habilidade de articular o papel de futuro professor. A formação do professor de Matemática ainda hoje não possibilita ao licenciando o desenvolvimento de profissional autônomo e capaz de articular o conhecimento específico ao pedagógico.

Paiva (2002) comprova a situação da formação inicial do professor de Matemática. O curso de Licenciatura privilegia as disciplinas específicas, ao desarticulá-las das disciplinas pedagógicas. Além disso, o ensino teórico dos conteúdos matemáticos e didático-pedagógicos é repassado de forma pronta, inquestionável. Conclui-se que o ensino não parte do conhecimento prévio dos alunos, nem considera relevantes as experiências profissionais que muitos já apresentam como professores.

Campos (2004) considera que a desarticulação entre os conhecimentos específicos e pedagógicos ainda continua um dos grandes problemas na formação do profissional. O fato é decorrente da visão que ainda se tem do professor de Matemática: um profissional que transmite oralmente conteúdos ordenados baseando-se no conteúdo de livros textos e outras fontes de informação.

Essa postura, segundo a autora, é decorrente da formação que envolve o processo que valoriza a atenção, memorização, fixação de conteúdos e o treino procedimental com atividades mecânicas e repetitivas. O licenciando vivencia situações em que o aluno é agente passivo e individual no processo de aprendizagem.

Cyrino (2006) defende que a formação está centrada no paradigma da racionalidade técnica herdada do positivismo. A atividade profissional é considerada instrumental e dirigida para a solução de problemas por meio de aplicação rigorosa de teorias e técnicas científicas. A relação entre teoria e prática, quando existe, não permite

ao licenciando a oportunidade de questionar, investigar e refletir sobre o saber e o saber-fazer.

O conhecimento matemático é composto por uma variedade de postulados, teoremas, corolários e está intimamente relacionado à vida cotidiana. As dificuldades dos alunos na compreensão perpassam pelos conhecimentos específicos da Aritmética, Geometria e Álgebra. Também surgem na compreensão dos conceitos e dos procedimentos relacionados aos respectivos conhecimentos específicos.

Para Rêgo (2000) e Lopes (2003), o conceito de função é também um conhecimento de difícil compreensão, não só para os alunos da educação básica, mas também para os alunos da educação superior e professores. Por sua ampla utilização em diversas áreas do conhecimento e propiciação ao desenvolvimento de habilidades mentais relacionadas à Lógica e à Matemática, necessita ser pesquisado na formação docente.

Para Zuffi e Pacca (2000), a simples apresentação e formalização do conceito de função não são suficientes para ampliar o conhecimento dos licenciandos para além do que foi aprendido no Ensino Médio. Constatam que a linguagem matemática dos licenciandos está determinada muito mais pela cultura matemática escolar estabelecida do que pelos aspectos lógicos e formais com os quais têm contato no curso superior.

Regras e procedimentos da comunidade escolar e os livros didáticos apresentam destaque maior do que os significados matemáticos e sócio-culturais. Os problemas de aprendizagem do conceito de função, na formação inicial do professor de matemática, se tornam aparentes no momento do exercício do trabalho docente.

Os autores constatam que os professores pouco discutem as condições de domínio e a unicidade das imagens na definição de função e casos de não-funcionalidade. Apresentam ainda dificuldades em visualizar a inversão dos papéis de x e y, como variáveis dependente e independente comumente utilizadas. Os professores apresentam noções simplificadas do conceito de função matemática, introduzindo, na prática docente, "[...] um formalismo vazio, carente da maior parte dos significados que lhe caberiam" (ZUFFI; PACCA, 2002, p. 8).

Rossini (2006) afirma que geralmente os professores organizam a seqüência didática para o conceito de função de forma compartimentada, sem integração entre as diferentes tarefas, seguindo geralmente os livros didáticos. Desenvolvem poucas atividades sobre o conceito de variável. Para esta autora, os professores não

incorporaram, nos discursos, o conceito de função vinculado ao de variação. Ao utilizarem números, os professores preferem trabalhar com números inteiros não negativos, evitando os números racionais e reais.

É necessário desenvolver pesquisas que busquem alternativas para sanar as dificuldades e tentar quebrar "o círculo vicioso" do aluno que não aprende o conceito porque o professor o desconhece com profundidade, pois, em toda a formação, não lhe foi possibilitada a oportunidade de também estudá-lo adequadamente. Tratar do ensino e aprendizagem do conceito de função, na formação inicial do professor de Matemática torna-se urgente.

Para autores[1] que estudam a formação de professores, reconstruir saberes específicos e incorporar novos saberes pedagógicos auxilia o professor a colocar em ação novas práticas.

Autores[2] que pesquisam a formação do professor de Matemática corroboram com esse pensamento e acrescentam que os saberes matemáticos devem se relacionar não só aos saberes pedagógicos, mas também, aos saberes históricos, filosóficos e epistemológicos.

A articulação das disciplinas matemáticas e educacionais deve acontecer diante da construção de conceitos matemáticos, de conhecimentos básicos que já dispõem, por meio do diálogo, da investigação, do questionamento e da reflexão. É fundamental que o professor desenvolva o hábito de duvidar, de pensar os fatos de diferentes formas.

Ao contemplar o estudo do conceito de função na formação do professor de matemática, possibilita-se o estudo da relação de diversos tópicos da Matemática, sobretudo aqueles estudados no Ensino Médio. A adequada compreensão do conceito de função, de acordo com os pesquisadores[3] da área, pode garantir ao licenciando um bom desenvolvimento acadêmico já que este conceito é um dos principais pré-requisitos para as disciplinas do Ensino Superior.

Pode auxiliar também no desenvolvimento de técnicas de modelagem da vida real e na compreensão de diferentes áreas do conhecimento: Economia, Química, Física, Biologia, inclusive outras áreas de conhecimento da própria Matemática. É fundamental que o licenciando perceba a importância do estudo desse conceito, sua concepção pessoal não só sobre o conhecimento, mas como o aprendeu na educação básica.

---

[1] Tardif (2002), Mizukami (2006)
[2] Ponte (1992), Garnica (1997), Paiva (2002), Faria (2006), Cyrino (2006)
[3] Rêgo (2000), Lopes (2003)

Contempla-se neste trabalho, a valorização dos conhecimentos prévios dos alunos sobre conhecimentos matemáticos e de aprendizagem de conceitos, conhecimentos que sustentam o desenvolvimento dos procedimentos, diante das motivações epistemológicas e históricas dos próprios matemáticos.

Descrever o processo mental do licenciando, ao tentar ressignificar o conceito de função existente em sua estrutura cognitiva, diante da aprendizagem conceitual reflexiva, é o desafio da pesquisa.

A teoria mais bem adequada às propostas de investigação deste trabalho é a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, Novak e Hanesian (1980). Além de valorizar a aprendizagem de conceitos, ela promove, na estrutura cognitiva do aluno, a generalização significativa do conhecimento como produto da atividade reflexiva. Permite ao aluno o domínio dos conceitos e proposições verbais pelas experiências prévias dos conhecimentos.

A Instituição utilizada para o desenvolvimento da pesquisa é a Universidade Estadual do Ceará. Desde a criação, na década de 70, apresenta características voltadas para a formação docente, em diferentes cursos científicos, entre eles, de Matemática.

Por se tratar de instituição de nível superior cearense, a investigação pode contribuir para a compreensão da formação atual do professor de Matemática, em Fortaleza, e por haver poucas pesquisas na área, com público específico.

As perguntas que emergem diante dos problemas e das justificativas apresentados são:

- quais são os conhecimentos prévios dos alunos sobre o conceito matemático de função?
- como os alunos se estruturam mentalmente para ressignificar o conceito de função?

O objetivo deste trabalho é descrever como os alunos do primeiro ano da Licenciatura em Matemática da UECE ressignificam o conceito matemático de função, diante de processo interventivo, baseado na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel.

O que se pretende realizar especificamente é:

- avaliar os conhecimentos prévios dos alunos sobre os conceitos de função e seus conceitos subjacentes[4];

[4] Domínio, contradomínio, imagem, lei de formação, equação, expressão algébrica, variável e incógnita

- descrever como os alunos ressignificam o conceito de função e conceitos subjacentes com análise interpretativa baseada nas fases do princípio da Assimilação de Ausubel.

Os capítulos que compõem este trabalho são apresentados a seguir.

No capítulo 1 são apresentados os conceitos básicos sobre formação e formação inicial de professores, saber docente e aprendizagem do professor. A ênfase está nos aspectos básicos a serem considerados na formação docente: a valorização do conhecimento prévio do licenciando e a reflexão sobre o processo de aprendizagem.

No capítulo 2 é apresentado o contexto histórico da formação do professor de Matemática, discussão sobre os temas discutidos nas pesquisas nacionais e internacionais sobre os problemas da formação do professor de Matemática e a influência do saber matemático na concepção que os professores têm sobre este saber.

No capítulo 3 são apresentadas as dificuldades que matemáticos, professores e alunos enfrentam ao se deparar com o conceito de função e os conteúdos que precisam ser abordados sobre o conceito na formação do professor de Matemática.

No capítulo 4 apresenta-se o conceito de aprendizagem significativa de acordo com a Teoria de Ausubel, Novak e Hanesian (1980) e a Teoria dos Mapas Conceituais desenvolvidos por Novak (1976).

No capítulo 5 descreve-se a metodologia, os momentos iniciais da pesquisa, as entrevistas com o professor da disciplina de Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral I e os alunos voluntários, e os resultados dos questionários aplicados com os alunos.

No capítulo 6 são descritas algumas intervenções previamente selecionadas em três fases: assimilação, organização e aplicação do conceito de função baseadas nos Princípios Programáticos da teoria de Ausubel, Novak e Hanesian (1980).

1. A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

O objetivo principal deste capítulo é apresentar as contribuições dos teóricos da área da formação de professores, dos saberes e da aprendizagem docente para esta pesquisa.

O conceito de formação é apresentado conforme as idéias de Charlot (2005), Lastória e Mizukami (2002) e Nunes (2002) diante da relação estreita entre saber e cultura. A formação inicial se desenvolve pelos conceitos preconizados por Mizukami (2006) relacionando-a com construção sistemática e contextualizada do ser professor e do saber ensinar.

De todos os conceitos que permeiam a formação de professores, dois são enfatizados nesse trabalho, pois estruturam e fundamentam a formação de professores: o conceito de saber e de aprendizagem docente.

São apresentadas as discussões sobre a relação entre formação e saber e as características do saber profissional docente de acordo com a visão de Tardif (2002) sobre o que define saber: a relação entre conhecimento, competência, habilidade e atitudes valorizados pelo meio social.

Na discussão dos saberes são destacados os trabalhos de Shulman (1986), de Guimarães (2005) que apresenta o trabalho de Gauthier (1998) e de Mizukami (2006) que divulga o trabalho de Darling-Hammond e Baratz-Snowden (2005). Este último traz maiores contribuições à pesquisa proposta ao valorizar a relação entre os conhecimentos prévios dos alunos e o novo conhecimento, e ao enfatizar a necessidade de o professor conhecer os conceitos do trabalho docente.

A aprendizagem docente é apresentada de acordo com os trabalhos de Nunes (2002) que contribui com as características dos aprendizes adultos e de Blanco (2003) e Mizukami (2006) que complementam suas idéias sobre a caracterização do ensino superior capaz de possibilitar aprendizagem adulta que considere características básicas no processo de aprendizagem docente.

1.1. O Conceito de Formação e a Formação Inicial de Professores

Charlot (2005) explica que, nos séculos XI e XII, o significado de formar era exatamente “dar forma”. No século XIX, a palavra toma um outro significado mais voltado para a formação profissional, ao caracterizar o universo da profissão. Na década

de 1950, começa a caracterizar as capacidades específicas a partir da análise da função individual no trabalho.

Já na década de 1990, qualidades como transferibilidade, adaptação, flexibilidade da mente e das condutas são incorporadas ao conceito. Assim, o autor define que "formar alguém é torná-lo capaz de executar práticas pertinentes a uma dada situação" (CHARLOT, 2005, p. 90).

Acrescenta ainda que a lógica da formação se baseia na lógica das práticas contextualizadas e organizadas para atingir objetivos determinados, diante da situação imposta. Para o autor, formar professores é torná-los competentes para que possam gerir as tensões de sala de aula, construir as mediações entre práticas e saberes por meio da prática dos saberes e do saber das práticas.

Para Lastória e Mizukami (2002), a formação de professores é um processo complexo capaz de gerar conhecimentos durante a vida do professor, envolvendo diferentes tempos, comunidades de aprendizagens e experiências.

De acordo com Nunes (2002), a formação de professores é um processo que se inicia antes do exercício das atividades pedagógicas, prossegue ao longo da carreira e passa pela prática profissional.

Na perspectiva de Schön (1992), citado por Nunes (2002), essa formação deve conduzir, de forma crítica, ao aperfeiçoamento e enriquecimento da competência profissional diante da concepção de conhecimento com base na relação dialética entre teoria e prática.

Para este trabalho, a formação do professor é contemplada como um processo de desenvolvimento da consciência crítica da atuação profissional, diante do conhecimento que constrói sobre os conteúdos formais, matemáticos e pedagógicos, e humanos, sobre os alunos e sobre si mesmo, processo de construção da identidade profissional coletiva e individual que acontece a partir da formação inicial.

Aprender a ensinar acontece em diferentes momentos da vida do professor. Porém o momento, no qual a aprendizagem é sistematizada e focada em objetivos específicos, é a formação inicial.

Mizukami (2006, p. 216) define esta formação como "um momento formal em que processos de aprender a ensinar e aprender a ser professor começam a ser construídos de forma mais sistemática, fundamentada e contextualizada". Assim, a formação inicial apresenta como função básica o desenvolvimento de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores, dentro do espaço que possibilite a compreensão e o

comprometimento com a aprendizagem do licenciando, ao longo da vida. Deve ainda, segundo Mizukami (2006), fornecer formação teórico-prática que estimule os processos de aprendizagem e o desenvolvimento profissional na trajetória docente.

É função da formação inicial auxiliar os licenciandos na compreensão do processo formativo e a conceberem a profissão do professor como domínio de conceitos, habilidades, atitudes, comprometimento e investigação.

1.2. Os Saberes na Formação Docente

Os variados conceitos da formação docente abordados neste trabalho, relacionam-se a saberes dos professores e à aprendizagem desses saberes. Compreender os conceitos básicos e sua influência para a formação de professores pode contribuir para a formação da base teórica deste trabalho.

Para Tardif (2002), o saber está vinculado não somente aos conhecimentos, mas também às competências, habilidades e atitudes consideradas pela sociedade como importantes para o processo de formação institucionalizado.

Historicamente, o conhecimento e os saberes dos professores estão ligados à profissionalização do ensino, ao seu trabalho e formação, ao pensamento, à sua história de vida e à relação entre cultura escolar e cultura do professor.

A relação entre formação e saber se baseia em três considerações. A primeira diz respeito ao professor como sujeito do conhecimento. Se o professor é dotado de conhecimento, deve ter o direito de tomar decisões sobre a própria formação profissional.

A segunda se relaciona ao aspecto do conhecimento do trabalho do professor. Se o profissional trabalha com conhecimentos específicos sua formação deve basear-se nesses conhecimentos.

A terceira consideração diz respeito à organização do conhecimento. Se o professor vai trabalhar com conhecimento integrado, sua formação deve contemplar a unificação e inter-relação entre os conhecimentos a serem aprendidos.

Diante das considerações, Tardif (2002) relaciona quatro características básicas dos saberes profissionais docentes. A primeira característica se relaciona à temporalidade do saber. A história de vida escolar do professor influencia fortemente a concepção de ensino e seu papel como profissional. Suas pesquisas revelam que os alunos, muitas vezes, passam pelos cursos de formação inicial de professores sem

alterar ou abalar as concepções iniciais de ensino. Por outro lado, os primeiros anos de prática profissional são decisivos, segundo o autor, para a aquisição do sentimento de competência e para o estabelecimento de rotinas de trabalho do saber experimental.

Os saberes são utilizados e desenvolvidos durante a carreira. Tardif (2002, p. 262) afirma que "saber como viver numa escola é tão importante quanto saber ensinar na sala de aula", e o saber não se adquire na formação universitária, mas sim na formação prática e experimental adquirida com o tempo.

A segunda característica se baseia na pluralidade e heterogeneidade do saber profissional. Os saberes são provenientes de diversas fontes: cultura pessoal, conhecimentos disciplinares, didáticos e pedagógicos, conhecimentos curriculares, do próprio saber relacionado à experiência de trabalho e na relação com profissionais e tradições do ofício.

São também variados, não formam um repertório de conhecimentos unificado em torno de uma disciplina, de uma tecnologia, de uma concepção do ensino. São ecléticos e sincréticos. Os professores utilizam muitas teorias, concepções, técnicas, em busca de diferentes objetivos ao mesmo tempo. São heterogêneos pelo fato de os professores utilizarem uma variedade de habilidades ou competências para gerência de sala de aula e uma diversidade de objetivos: emocionais, sociais, cognitivos, coletivos. Como os saberes estão na ação, a serviço dela, e nela assumem significado e utilidade, o autor atribui também a característica de unicidade ao saber docente.

A terceira está pautada na personalização e na situação do saber. Os saberes dos professores estão intrinsecamente associados às pessoas, à experiência, à sua história de vida social, inclusive da situação de trabalho. As pessoas que, em seu ofício, se relacionam com seres humanos precisam contar consigo mesmas, com recursos, com capacidades pessoais, com a própria experiência, com a capacidade de controlar o ambiente de trabalho. Além disso, os saberes são construídos e utilizados em função de situação específica do trabalho, caracterizando-o como saber situado.

A quarta característica se baseia na idéia de que o fato de o objeto de trabalho docente ser humano implica que o saber do professor carrega as marcas do humano. O saber do professor também deve ser composto pela disposição em conhecer e compreender os alunos nas particularidades e evolução em sala de aula. Deve apresentar ainda componente ético e emocional. O trabalho diário com os alunos provoca, no professor, o desenvolvimento do conhecimento de si, das emoções, dos valores, da natureza, de sua maneira de ensinar.

Assim, o conhecimento do outro implica a busca do conhecimento de si mesmo que auxilia conseqüentemente na compreensão do outro, diante do processo dialético da construção do saber.

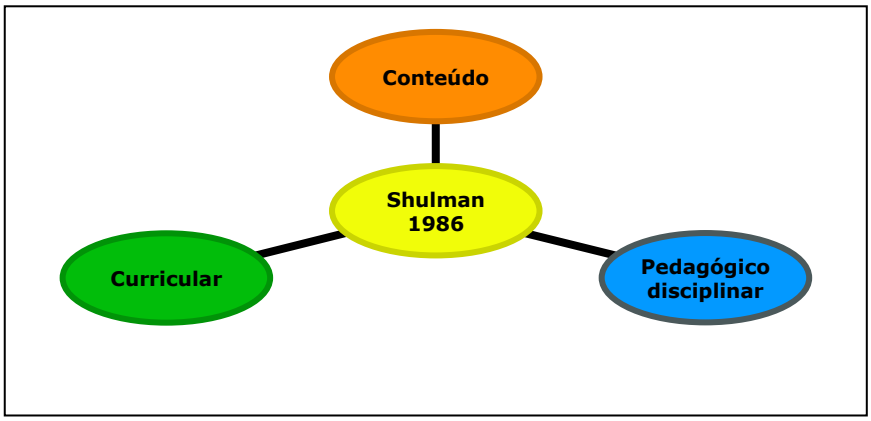
1.3. Tipos de Saberes na Formação Docente

Muitos autores estudam a temática praticamente sob o mesmo enfoque: subdivisão do conhecimento em científico, pedagógico e curricular.

Shulman (1986), um dos pesquisadores pioneiros na área apresenta três categorias de conhecimentos dos professores (figura 1):

- conhecimento do conteúdo da disciplina;
- conhecimento pedagógico-disciplinar;
- conhecimento curricular.

Figura 1 – Tipos de Saberes na Formação Docente de Shulman



Fonte: Elaboração própria

O conhecimento do conteúdo se refere ao conjunto e à organização do conhecimento na mente do professor. O professor deve conhecer a disciplina de acordo com diferentes perspectivas e estabelecer relações entre vários tópicos do conteúdo disciplinar, além de relacionar o conteúdo da disciplina com o conteúdo de outras áreas do conhecimento.

O conhecimento didático ou pedagógico-disciplinar está relacionado ao saber ensinar. Trata da visão do conhecimento disciplinar como saber a ser ensinado, diferentes formas de apresentá-lo, de representá-lo, as estratégias necessárias para a reorganização da compreensão dos alunos, bem como as concepções, crenças e

conhecimentos dos estudantes sobre a disciplina são saberes a serem adquiridos pelos professores na formação.

O conhecimento curricular engloba o conhecimento dos objetivos e conteúdos, de materiais de ensino, da capacidade de articular esse conteúdo e da história em sua evolução. O currículo e sua associação a materiais são, para Shulman (1986), a matéria-prima da pedagogia, conhecimentos fundamentais para que o professor possa desenhar as ferramentas de ensino.

Guimarães (2005), expondo as discussões de Gauthier (1998) sobre o conjunto de saberes da profissionalidade docente, apresenta três posições importantes para a compreensão atual do saber docente.

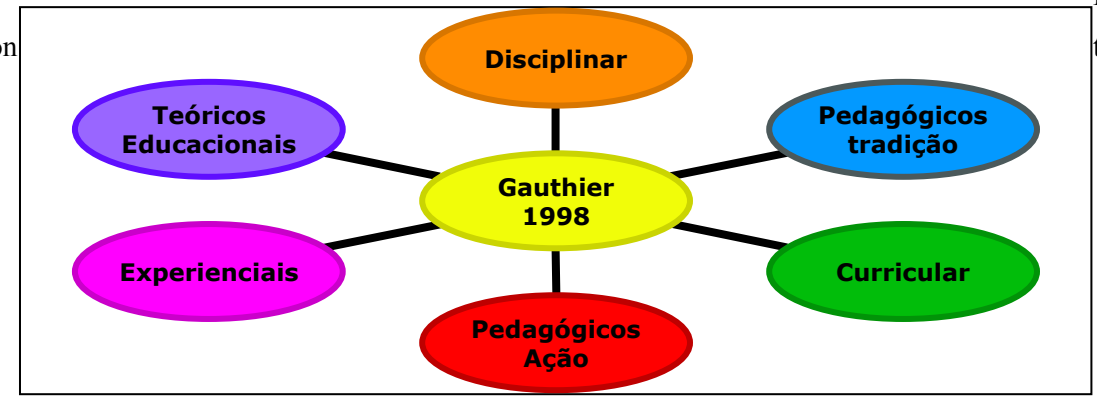
A primeira posição defende a docência como ofício de saberes. Basta saber o conteúdo para ser bom professor. A segunda posição trata o conjunto de saberes docentes sem ofício, sem correspondência com a realidade. A partir de uma caracterização tecnicista, define o saber como técnico e aplicativo. A terceira posição trata dos saberes construídos na ação e de maneira pessoal.

Diante das posições e discussões suscitadas pelos antagonismos é que Gauthier (1998) define seis tipos de saberes docentes (figura 2):

- disciplinares, apoiados no saber da matéria, das ciências e do conhecimento;
- curriculares, saberes de programas e manuais que orientam o planejamento;
- teóricos educacionais, tratam do funcionamento e da organização da escola, da evolução da criança e da profissão de professor;
- pedagógicos na tradição, dizem respeito ao fazer profissional, a maneira de ensinar e ao uso da profissão;
- experienciais, conhecimentos próprios dos professores, a partir de experiências repetidas;
- pedagógicos na ação, a partir do saber da experiência, ao se tornar público e verificado por pesquisas em sala de aula.

Figura 2 – Tipos de Saberes na Formação Docente de Gauthier

Fonte:



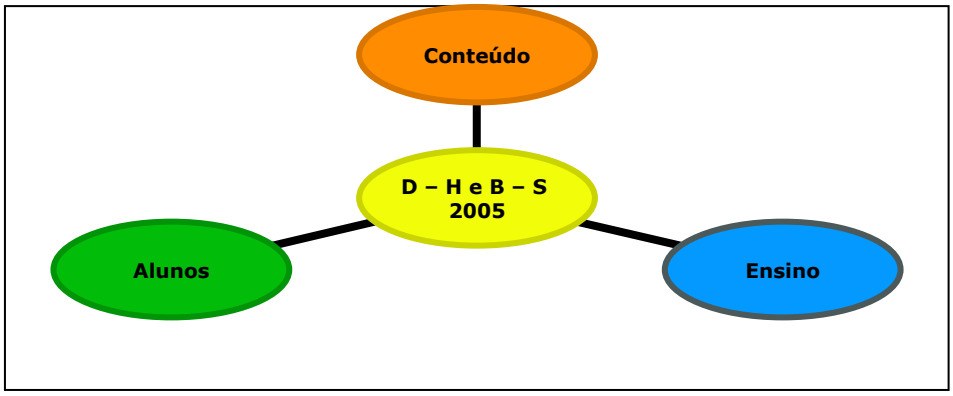
Elaboração própria

Gauthier (1998) trata do saber docente de uma forma mais detalhada do que Shulman (1986), subdividindo o conhecimento pedagógico e acrescentando o saber da experiência como saber também a ser adquirido na formação docente. A base de saberes, porém, continua a mesma: o saber científico, o saber pedagógico e o saber curricular continuam a ser contemplados de acordo com as idéias de Shulman (1986).

Mizukami (2006) indica três áreas gerais do saber que os professores iniciantes devem construir na formação (figura 3) a partir dos resultados das pesquisas desenvolvidas por Darling-Hammond e Baratz-Snowden (2005):

- conhecimentos sobre os alunos, como aprendem e se desenvolvem;
- conhecimento da matéria e objetivos curriculares;
- conhecimento do ensino.

Figura 3 – Tipos de Saberes na Formação Docente de Darling-Hammond e Baratz-Snowden



Fonte: Elaboração própria

A primeira área abrange os conhecimentos e as habilidades dos alunos. Dessa forma, os autores afirmam ser necessários o conhecimento da natureza construtiva do ato de conhecer e como estabelecer a relação entre as experiências prévias dos alunos e o novo conhecimento. Além disso, conhecer como os alunos processam as informações implica conhecer: o que os alunos pensam, como pensam e quais as estratégias necessárias e mais apropriadas para desenvolvimento do processo de aprendizagem adequadamente.

A segunda área trata da necessidade do professor em identificar, no conteúdo que ensina, os conceitos centrais que possibilitam a compreensão da matéria. É necessário ainda que os professores saibam diagnosticar o que os alunos já sabem e o nível de compreensão para delinear planos curriculares e desenvolvê-los de acordo com as metas que considerem o conhecimento que os alunos já apresentam sobre o saber a ser ensinado em sala de aula.

A terceira área diz respeito ao ensino do conteúdo. É necessário que o professor domine o conhecimento específico da área, tenha conhecimento pedagógico do conteúdo, de como ensinar alunos diferentes, de avaliação e sobre atividades apropriadas de manejo de classe.

Em pesquisas mais recentes, como as de Darling-Hammond e Baratz-Snowden (2005), o tripé básico citado anteriormente, advindo das idéias de Shulman (1986), ainda continua a existir. O conteúdo científico e pedagógico passa a coexistir de maneira integrada em um único saber. O saber curricular passa a ser contemplado diante da visão relativa, e não mais absoluta, já que os conhecimentos prévios dos alunos precisam ser considerados na formação do saber.

A contribuição passa a ser o conhecimento que o professor precisa ter sobre o aluno e sobre os aspectos que lhe dizem respeito e que podem influenciar o processo de aprendizagem.

1.4. A Aprendizagem docente

Diante dos saberes básicos do professor em formação, o processo da aprendizagem precisa ser explicitado para que os objetivos da formação inicial sejam alcançados. Dentre as várias perspectivas de pesquisas de formação de professores, Nunes (2002) apresenta a vertente que investiga a perspectiva do desenvolvimento e da aprendizagem adulta.

A autora, baseada na perspectiva teórica de pesquisas, apresenta as características básicas de aprendizes adultos:

- capacidade de autogerenciar e autodeterminar a aprendizagem;
- acúmulo de várias experiências como recurso para aprendizagem;
- orientação de desenvolvimento para competências sociais e profissionais;
- avaliação de progressos tendo em vista as metas estabelecidas e a preferência por aprender por meio de resoluções de problemas.

Dessa forma, o ensino, na formação dos professores, contempla aspectos da aprendizagem pautada em situações específicas, que consideram a natureza e a aprendizagem adulta.

Blanco (2003) apresenta características de ensino que possibilitam essa aprendizagem, dentre elas:

- valorização do conhecimento e das crenças dos futuros professores;
- interpretação das experiências a partir de estruturas conceituais para ampliar e modificar os conhecimentos;
- mobilização do processo social-interativo entre grupos de pessoas;
- valorização da participação ativa do aluno diante de proposta de desenvolvimento de atividades significativas e de resolução de problemas.

Os processos de aprender a ensinar, de aprender a ser professor, segundo Mizukami (2006), são lentos, iniciam-se antes da formação inicial, e se prolongam por toda a vida. Tanto a escola como outros espaços de conhecimento são contextos a serem considerados na aprendizagem da docência.

A literatura para a compreensão do processo vem indicando algo mais do que Blanco (2003) apresenta. A reflexão como processo de questionamento sobre a prática com o objetivo de superar desafios e problemas também precisam ser considerados. Além disso, a aprendizagem docente precisa ser situada e socialmente distribuída a fim

de que os diferentes tipos de conhecimentos componham gradativamente a base de conhecimento do futuro professor.

Assim, para Mizukami (2006), a organização das situações de ensino capazes de possibilitar aprendizagens de alunos diferentes, de trajetórias pessoais e culturais diversas, e a construção de conhecimentos de ensino dos diferentes componentes curriculares, são pontos centrais em qualquer processo formativo da docência e importantes para se preparar professores que propiciem aos alunos condições adequadas de aprendizagem.

O foco deste trabalho se concentra na formação inicial do professor de matemática tendo em vista o desenvolvimento de saberes matemáticos. Dentre eles, destacam-se os saberes de conhecimentos dos alunos e do conhecimento da matéria desenvolvidos por Darling-Hammond e Baratz-Snowden (2005), apresentados por Mizukami (2006).

A escolha se justifica pelo fato de os autores contemplarem a formação de professores, diante da compreensão da relação entre os conhecimentos prévios dos alunos e o novo conhecimento. A valorização dos saberes matemáticos se apresenta como marco inicial do desenvolvimento da pesquisa.

Além disso, os autores defendem a tese de que o professor necessita identificar, no conteúdo, os principais conceitos que possibilitam sua compreensão. A proposta é utilizada como aspecto principal da pesquisa. O estudo dos conceitos matemáticos, na formação inicial do professor da área, pode contribuir para que o aluno em formação possa atribuir aos conceitos matemáticos a mesma importância de seus procedimentos.

A pesquisa sofre influências das idéias de Blanco (2003) e Mizukami (2006). Por se tratar de aprendizagem docente, no período das intervenções, é enfatizada a participação ativa dos alunos diante do processo social interativo entre eles. Além da prática da reflexão e do questionamento dos conceitos de cada atividade, possibilitando não só a reflexão sobre o pensamento dos colegas, mas, sobretudo, uma reflexão sobre o próprio pensamento.

2. OS SABERES NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

O objetivo deste capítulo é apresentar, diante da perspectiva histórica, o surgimento da formação de professores de matemática no Brasil, a evolução das pesquisas nacionais e internacionais sobre o tema, bem como as concepções e os saberes dos licenciandos em matemática.

O estudo realizado do desenvolvimento histórico da formação do professor de matemática, no Brasil, procura evidenciar conforme trabalhos de Valente (2005), as transformações, na década de 1930, que perduram até hoje. Com a formação dicotômica do professor de matemática, os problemas da compreensão científica começam a surgir e a se agravar com os anos. As pesquisas nacionais e internacionais surgem justamente nesse período, entre a década de 1960 e 1970, em busca de compreender a formação de professores, inclusive a dos professores de matemática.

Os trabalhos de Paiva (2002), Sztajn (2002) e Ferreira (2003) caracterizam as pesquisas internacionais, na evolução que parte da solução de problemas práticos, na década de 1960, passa pela busca da eficácia do ensino, na década de 1970 e chega aos anos 1990 com o objetivo de compreender o pensamento do professor, crenças, concepções e valores a partir do estudo do saber do profissional.

As pesquisas brasileiras sobre a formação de professores são apresentadas na mesma lógica de pensamento. Os trabalhos de Ferreira (2003) e as pesquisas organizadas por Nacarato e Paiva (2006) revelam evolução semelhante das pesquisas internacionais. As pesquisas de compreensão da estrutura dos cursos de licenciatura, na década de 1970, evoluem para compreensão mais subjetiva do professor em formação, com enfoques em saber docente, desenvolvimento profissional, aprendizagem do professor e a constituição de sua subjetividade e identidade.

Em relação especificamente ao saber matemático, as pesquisas de Ponte (1992), Brito e Alves (2006), Pires, Silva e Santos (2006) denotam similaridades e indicam a concepção do professor de Matemática voltada para o aspecto absolutista e

instrumental, em que o conhecimento é mais valorizado do que o ensino desse conhecimento. Outro aspecto se baseia na concepção do professor do saber necessário na relação ensino-aprendizagem, a partir da dissociação entre teoria e prática, caracterizando o paradigma da racionalidade técnica. Considera-se que a formação das concepções dos licenciandos em matemática seja causada pelos aspectos dicotômicos da formação.

2.1. A evolução histórica da Formação dos Professores de Matemática no Brasil

De acordo com Valente (2005), a Matemática do século XVII é utilizada para suprir as necessidades de práticas de guerra e de defesa do território colonial como ingrediente da formação militar. Em 1808, com a vinda da Corte Portuguesa para o Brasil, estabeleceram-se a Academia Real dos Guardas-Marinha e Academia Real Militar. Os cursos das Academias contemplavam Aritmética, Álgebra e Geometria/Trigonometria com base em compêndios franceses, por professores militares brasileiros e portugueses. Dessa forma, os professores tornavam-se autores de livros didáticos de Matemática, em liceus e cursos preparatórios do período. O *status* do professor de Matemática é técnico ministrando cursos especializados para líderes militares.

Com a criação dos cursos jurídicos em Olinda e São Paulo, em 1827, a Matemática constitui saber de cultura geral da escola, sendo a Geometria o conhecimento mais valorizado. Assim, de acordo com o autor, os militares professores de Geometria passam a ter público voltado também para os cursos jurídicos e para escolas de medicina. Pela situação imposta, os professores da ciência matemática se multiplicam provenientes de escolas militares e politécnicas, do colégio Pedro II e de outros poucos estabelecimentos oficiais das diferentes províncias. Os professores são para formar o grupo social de poder político e econômico do período imperial.

Com a Independência e a instauração do regime político-republicano, poucas mudanças se dão. Os professores da cátedra de Matemática são admitidos por concursos idênticos aos realizados para ingresso no magistério de ensino superior com defesa de tese, prova escrita e prova didática, considerada mais como avaliação oral do que propriamente avaliação de condições para ser professor. Os candidatos, segundo Valente (2005), são alunos egressos dos cursos de engenharia, e, para ser professor catedrático de Matemática do ensino secundário, o candidato deve caracterizar-se muito mais como matemático do que como professor.

O Brasil se caracteriza como um país de milhões de analfabetos. Vive, segundo Nagle (2001), o período de entusiasmo pela educação, acreditando que pela multiplicação das instituições escolares, é possível incorporar grandes camadas da população em direção ao progresso nacional, e do otimismo pedagógico, depositando, no escolanovismo, a responsabilidade da verdadeira formação do novo homem brasileiro. O objetivo é romper as estruturas oligárquicas agrárias de analfabetismo e ignorância. O processo de modernização é urgente para que a civilização agrário-comercial se torne urbano-industrial.

Em 1924, com a fundação da Associação Brasileira de Educação, as discussões das questões educacionais se fazem mais presentes. De acordo com Schwartzman, Bomeny e Costa (2000), a grande bandeira do movimento pela educação é a discussão sobre a escola pública, universal, gratuita e leiga. A função da educação é formar cidadãos livres e conscientes a serem incorporados no que os autores denominam de "grande Estado Nacional" (SCHWARTZMAN; BOMENY; COSTA, 2000, p. 70). O movimento pela Escola Nova adota princípios pedagógicos não autoritários, não repetitivos, aproximando-se de processos mais criativos de aprendizagem.

Assim como no século XVII, o professor de Matemática desempenha o papel de formador dos que detêm o poder econômico como forma de garantia de perpetuação desse *status*. As discussões e propostas de mudança da educação brasileira se tornam mais ativas a partir da Reforma Francisco Campos de 1927, caracterizada a princípio, segundo Vidal e Faria Filho (2002), pela reforma do ensino primário, técnico-profissional e Normal, em Minas Gerais.

Com o objetivo de renovar a educação, o Departamento Nacional de Ensino e a Associação Brasileira de Educação aprovam e apóiam, em 1928, a iniciativa do diretor e professor catedrático em Matemática do Colégio Pedro II, Euclides Roxo, a renovação do ensino da Matemática. Ele pretende fazer com que a Matemática brasileira acompanhe a evolução da Matemática mundial. Preocupa-se em dar tratamento diferenciado ao ensino, tornando as idéias brasileiras do conhecimento o mais atual possível. Busca ainda, entrelaçar os três conhecimentos matemáticos: Aritmética, Álgebra e Geometria, separados até então.

A renovação do ensino de Matemática, no secundário, implica também renovar a formação dos professores da área de atuação. De acordo com Valente (2005), Euclides Roxo destaca a necessidade que o país tinha em estruturar a formação do professor secundário em Matemática, é que, apresentando conhecimento profundo na área, nada

compreendia de ensino. Para Roxo há a necessidade de criar a escola normal para professores secundários, nos moldes americanos, formando-os em uma cultura especializada, com conhecimentos de psicologia infantil, de novas metodologias e de pedagogia.

Com a Revolução, na década de 1930, diante da necessidade do novo governo em realizar reformas urgentes para obtenção de mais apoio à revolução, as modificações ocorridas do Colégio Pedro II devem ser estendidas aos demais estados da federação, configurando uma "*mudança concreta, de boa visibilidade e de apelo popular*" (BRAGA, 2006, p. 72).

Em 1934, com a fundação da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP e, em 1939, com a fundação da Faculdade Nacional de Filosofia, no Rio de Janeiro, são criados os primeiros cursos de formação do professor secundário, servindo de modelo para outros cursos do país constituídos pela formação do Bacharel em 3 anos e para a formação do Licenciado em 1 ano. Assim, o professor de Matemática, como afirma Valente (2005), tem uma formação de Matemática, em 3 anos e, de Didática em 1 ano, tornando-se Bacharel e Licenciado em Matemática.

Apesar da oficialização, a discriminação, em relação à Licenciatura, é grande. Valente (2005, p. 15) afirma que "os próprios catedráticos da subseção de Matemáticas se encarregam de difundir junto aos alunos a tese da inutilidade dos estudos pedagógicos". Diante de críticas sobre a renovação do ensino da Matemática e de pressões políticas subseqüentes, é que, sob a forma legislativa, atesta-se o fracasso da nova reforma do ensino, a partir da promulgação em 1942, com a Reforma de Gustavo Capanema, da separação dos ramos da Matemática, descartando a idéia de fusão de conteúdos, como evidencia Valente (2002).

Os conhecimentos de Aritmética, Álgebra e Geometria são ensinados conjuntamente, em cada série e de forma independente, com a inserção de gráficos e textos com biografias de cientistas, sem grandes modificações na concepção do ensino da Matemática.

As mudanças influenciam de forma diferenciada, cada estado brasileiro. No Ceará, as mudanças levam, em 1944, ao Ministério da Educação o encaminhamento da proposta de refederalização da Faculdade de Direito do Ceará. A iniciativa suscita a autorização do funcionamento, em 1947, da Faculdade Católica de Filosofia do Ceará responsabilizando-a também pela formação Matemática e pedagógica dos professores do ensino secundário.

A Lei no. 8.423, de 3 de fevereiro de 1966 (CEARÁ, 2006) encampa a Faculdade Católica de Filosofia do Ceará sob a denominação de Faculdade de Filosofia do Ceará. Subordinada à da Secretaria de Educação e Cultura, a faculdade tem como obrigação manter os cursos de Letras, Geografia, História, Pedagogia, Filosofia e Matemática, no turno da noite. Observa-se que ainda não existia o curso de formação específica do professor de Matemática, determinando a dicotomia entre conteúdos científicos e pedagógicos. Em 18 de outubro de 1973, a Lei no. 9.753 autoriza o Poder Executivo a instituir a FUNEDUCE.

Após dois anos da resolução no. 2, de 05 de março de 1975, referendada pelo Decreto no. 11.233 que a Universidade Estadual do Ceará é criada. O fato se dá pela reunificação das Escolas de Enfermagem São Vicente de Paula, de Serviço Social e da Faculdade de Filosofia do Ceará, do Conservatório de Música Alberto Nepomuceno e da Faculdade de Filosofia Dom Aureliano Matos em Limoeiro do Norte. Sua instalação é concretizada apenas em 1977, com atenção aos cursos considerados mais necessários ao desenvolvimento do Estado, dentre eles, de Ciências Tecnológicas, que inclui o curso de Matemática e Ciências Sociais, com inclusão do curso de Pedagogia (UECE, 2007).

A formação do professor de Matemática continua até a década de 1970, a apresentar característica voltada para a valorização dos conhecimentos específicos matemáticos, em detrimento dos conhecimentos pedagógicos e, até mesmo, da inter-relação entre eles. Até a década de 1990, essa configuração dicotômica, na formação do professor de Matemática, perdura. Nos cursos de Licenciatura em Matemática, as disciplinas específicas são estudadas nos primeiros três anos, para que as disciplinas pedagógicas se ministrem no último ano da graduação, seguidas do estágio supervisionado.

A dissociação entre Licenciatura e Bacharelado não é a única, as disciplinas específicas Matemáticas também são estudadas separadamente, sem interconexões entre conhecimentos algébricos, geométricos e aritméticos. Em face da problemática da formação de professores e do aumento da quantidade de crianças, nas escolas, os problemas de compreensão da matemática tornam-se mais explícitos. O significado do saber matemático se vincula ao fato de ser conhecimento de difícil acesso, restrito aos poucos com capacidade de compreendê-lo.

Para o estudo dessa problemática e a busca de soluções, as pesquisas, nacionais e internacionais, têm suas contribuições. Compreender a formação de professores e como

se processa, inclusive para professores de matemática, é o grande desafio dos pesquisadores.

2.2. As pesquisas Internacionais sobre a Formação do Professor de Matemática: perspectiva histórica

As pesquisas internacionais da formação de professores de Matemática iniciam na década de 1970 incentivadas pelos estudos na área de formação de professores que vinha se desenvolvendo desde a década de 1960, impulsionadas pelas transformações, na década de 1980, atualmente com ênfase em estudos em ascensão.

Segundo Ferreira (2003), a formação de professores da década de 1960 é estudada nos cursos de licenciatura ou de programas emergenciais voltados para a solução de problemas práticos. A educação e pesquisas são pouco valorizadas pelas políticas públicas vigentes.

Na década de 1970, a pesquisa educacional baseia-se em estudos experimentais quantitativos para avaliar diferentes métodos de treinamento de professores. O objetivo é "modelar o comportamento do professor e examinar os efeitos de determinadas estratégias de ensino" (FERREIRA, 2003, p. 21). A busca caracteriza um ensino eficiente. O paradigma dominante desse período se fundamenta no paradigma processo-produto pela compreensão da influência dos elementos do processo de ensino-aprendizagem a fim de garantir produto eficiente. A crítica às pesquisas se baseia na utilidade dos resultados por parte dos políticos, formadores, professores, escolas, administradores escolares, e, pelo fato de não ter alcançado a eficácia desejada.

Na década de 1980, Ferreira (2003) indica que as pesquisas educacionais já se pautavam em métodos naturalistas ou interpretativos de investigação. O foco das temáticas também se modifica. O pensamento do professor, bem como as influências do curso de formação de professores sobre seu desenvolvimento moral e cognitivo, aos poucos, substituem a visão tecnicista da década anterior. Sztajn (2002) afirma que os pesquisadores buscam entender o efeito do professor nos alunos. O foco das pesquisas de comportamento do professor e eficácia do ensino não discute o saber disciplinar de cada um.

Com o objetivo de elevar os padrões educacionais diante das reformas da educação, as idéias sobre a formação de professores, na segunda metade da década de 1980, tornaram-se díspares. De um lado, pesquisadores se preocupam com a formação como treinamento e investigam as habilidades específicas do profissional experiente na escola. De outro lado, grupos de pesquisadores se preocupam com a formação na perspectiva educativa e buscam investigar o pensamento dos professores, crenças, concepções, valores, considerando como fator fundamental para essa formação a cognição e o contexto do ensino.

A pesquisa do segundo grupo prevalece. As perguntas centrais mudam de foco e busca-se compreender o que os professores conhecem sobre os conteúdos, o conhecimento essencial para o ensino e quem produz esse conhecimento. Segundo Sztajn (2002), as pesquisas explicitam o que os professores entendem e como processam as informações que recebem. É perceptível que as teorias formuladas estão voltadas para a importância do conhecimento do professor.

Os trabalhos de Shulman (1986) impulsionam os estudos da eficácia do professor e os estudos dos processos de pensamento do docente, ao considerar a questão disciplinar e os aspectos particulares do ensino de disciplina específica. Diante dos fatos, para ser professor eficaz, ele deve desenvolver diversos saberes, em particular, o saber pedagógico-disciplinar, inclusive o que querem que os alunos aprendam e as melhores formas de ajudá-los na construção dos conceitos.

Mesmo com as mudanças, em muitos casos, de acordo com Ferreira (2003), os estudos ainda enfatizam as inconsistências e a inadequação do professor, proporcionando uma visão descontextualizada do que pensa o profissional.

As pesquisas, na área da formação de professores de Matemática, nesse período, revelam que, no caso específico da Matemática, houve maior dificuldade de acompanhamento das mudanças dos teóricos e pesquisadores. Paiva (2002) indica que saber conteúdos matemáticos é condição necessária e suficiente para ser um bom professor. Assim, pelas idéias de Shulman (1986), o professor de Matemática precisa desenvolver:

- domínio amplo da matéria, diversificado, em variados enfoques;
- conhecimento epistemológico do assunto a fim de garantir autonomia intelectual a partir da construção do próprio currículo;
- capacidade de transformação do conhecimento adquirido em algo significativo e esteja em nível das habilidades e conhecimentos dos alunos.

Na década de 1990, as pesquisas de formação de professores se consolidam em dois focos apresentados por Ferreira (2003):

- processo de aprender a ensinar dos professores;
- crenças, concepções e valores dos profissionais.

O objetivo, no momento, é analisar os processos de mudança e as inovações mediante informações baseadas nas organizações, currículo, nas didáticas e nos próprios profissionais. Esses processos devem "considerar o impacto que as inovações possam ter sobre as crenças e os valores dos professores" (FERREIRA, 2003, p. 25). O professor deixa de ser visto como objeto passivo de estudo e passa a ser considerado como profissional capaz de pensar, refletir e articular a prática, diante de valores, crenças e saberes, elemento fundamental do processo de formação e mudança.

Paiva (2002) acrescenta ainda que os pesquisadores começam a valorizar os saberes da experiência adquiridos na formação e vida profissional. Além disso, iniciam o processo que vem se fortalecendo ainda hoje, nas pesquisas de formação de professores e o desenvolvimento profissional do professor. Conhecer como os saberes se constróem e se desenvolvem é tão importante quanto conhecer os conhecimentos e saberes dos professores.

No início da década de 1990, a discussão na Educação Matemática, relacionada aos saberes dos professores, considera, de acordo com Sztajn (2002):

- o conhecimento específico matemático;
- o conhecimento do fazer matemático;
- o conhecimento emocional desenvolvido a partir da autopercepção apresentada pelo indivíduo, na relação com o conteúdo como dimensões inter-relacionadas do saber matemático.

Assim, para pesquisadores da época, o saber explícito do professor se articula à concepção de Matemática e natureza da disciplina. Os pesquisadores criam oportunidades para exploração do conhecimento conceitual do professor em diferentes contextos.

Outro pensamento no início da década de 1990 evidencia que o saber do professor precisa ser compreendido como saber integrado, contemplado em diversas dimensões, conforme Sztajn (2002):

- conhecimento matemático do professor;
- conhecimento das representações matemáticas;

- conhecimento dos alunos;
- conhecimento de como ensinar e do processo de tomada de decisão em sala de aula.

Pelo estudo das dimensões, pode-se compreender "como o professor transforma seu saber disciplinar em saber ensinável" (SZTAJN, 2002, p. 22). Assim, o conhecimento do professor, dos alunos e processos cognitivos, a escolha das atividades para o ensino de conceitos matemáticos, bem como a dimensão de domínio, familiaridade e relação do professor com o conteúdo matemático em si, são aspectos abordados nas pesquisas que investigam e compreendem a formação do professor de Matemática.

As pesquisas desse período revelam que o professor, com domínio do conhecimento matemático e conhecimento pedagógico, é um profissional mais flexível nas decisões em sala de aula, capaz de escolher tarefas mais apropriadas ao desenvolvimento de discussões matemáticas significativas. Além disso, a utilização de material curricular renovado pode influenciar positivamente a concepção do conteúdo matemático de professores experientes, assim como o trabalho reflexivo e colaborativo.

A evolução das pesquisas internacionais, na área da Educação, influenciou as pesquisas na formação de professores, sobretudo, na formação de professores de Matemática. Ao considerar o profissional como ser ativo, diante do conhecimento que apresenta, de sua experiência prática e dos aspectos subjetivos intrínsecos, as pesquisas avançaram não só em quantidade, mas, sobretudo, em qualidade.

Ainda assim, os resultados não conseguem explicar, de uma maneira global, como acontece a aquisição do saber pelo professor diante da diversidade de fatores racionais e emocionais que influenciam o processo. Além disso, os resultados das pesquisas são pouco utilizados nas instituições de ensino que se propõem a desenvolver o trabalho de formação de professores. Certamente a efervescência das discussões acerca do tema, no mundo exterior, influenciou e contribuiu para as discussões no Brasil. A evolução das pesquisas brasileiras de formação do professor, mais especificamente, a formação do professor de Matemática, é apresentada a seguir.

2.3. As pesquisas Nacionais sobre a formação do professor de Matemática: perspectiva histórica

A preocupação dos pesquisadores brasileiros, com relação à formação dos professores de Matemática, tem início na década de 1970 com os primeiros trabalhos desenvolvidos em programas de pós-graduação em educação, no mesmo paradigma das pesquisas internacionais da área. Os objetivos das pesquisas são:

- estruturar os cursos de licenciatura em Matemática;
- desenvolver pedagogia voltada para a prática de ensino e o estágio supervisionado;
- desenvolver programas caracterizados como módulos de ensino;
- estudar a influência do professor sobre o aluno;
- investigar a eficiência no treinamento dos professores.

Para isso, utilizam metodologia descritiva, exploratória e diagnóstica, mediante instrumentos estruturados, questionários, entrevistas, exercícios de alunos, testes e documentos. Os resultados genéricos destacam o desempenho dos indivíduos estudados fazendo uso de medidas estatísticas com ênfase no aumento das competências dos professores.

As pesquisas iniciadas na década de 1980, além de se caracterizarem em paradigma positivista pela investigação restrita aos programas de licenciatura, fazem-se de maneira escassa. O foco das pesquisas volta-se para o treinamento e formação de professores de Matemática. De acordo com Ferreira (2003), as pesquisas se subdividem em quatro categorias:

- avaliação de cursos de licenciatura;
- atitudes dos professores de Matemática diante das novas tecnologias;
- concepções e percepções dos professores de Matemática;
- prática pedagógica dos professores de Matemática.

Com a mudança de paradigma das pesquisas internacionais, as pesquisas brasileiras também começam um processo de transformação de investigação do treinamento e formação de professores. Ferreira (2003) afirma que estes aspectos começam a ser contemplados nas investigações:

- contexto do professor, realidade e necessidades da comunidade da qual faz parte;
- habilidade e competência do professor em elaborar projetos;
- diferentes experiências vivenciadas pelo professor no ensino da Matemática;

- visão crítica da avaliação dos cursos de licenciatura;
- conhecimentos dos licenciandos;
- opiniões de professores e futuros professores sobre dificuldades na elaboração metodológica.

O paradigma do pensamento do professor, nas pesquisas internacionais, sobre o tema, aparece nas pesquisas brasileiras lentamente fazendo com que a atenção dos pesquisadores se volte para as "cognições dos professores acerca de sua própria formação" (FERREIRA, 2003, p. 29).

Na década de 1990, a investigação dos programas de formação de professores persiste e se intensifica. As pesquisas buscam a identificação dos problemas e obstáculos de formação, avaliação de programas institucionais, discussão de questões polêmicas e proposição de novos rumos em novas perspectivas. As pesquisas também sofrem transformações nesse período. Ferreira (2003) destaca os tipos básicos:

- discussão sobre as conseqüências de determinadas teorias nos cursos de formação de professores;
- descrição do processo de formação com ênfase nos materiais de referência utilizados na formação, no perfil dos profissionais, nas sugestões de trabalho e nos materiais alternativos;
- construção coletiva do conhecimento, currículo e atividades.

A metodologia se pauta nos estudos de caso descritivo-analíticos, com ou sem tratamento estatístico, nos estudos fenomenológico-hermenêuticos, crítico-dialéticos, nas pesquisas participantes e nos estudos histórico-descritivos. A nova tendência de investigações da formação dos professores faz eclodir o trabalho colaborativo, as considerações da produção acadêmica brasileira na área e o processo de formação acadêmica de professores de Matemática.

As mudanças, na década, são de perspectiva. Em anos anteriores, enquanto a busca era compreender a estrutura dos cursos de licenciatura, as disciplinas, estratégias mais eficazes, as tecnologias emergentes diante da visão, das concepções e crenças dos licenciandos e professores de Matemática, agora é pela compreensão da reflexão do professor, pela investigação do trabalho colaborativo e da relação dialética entre teoria e prática.

As pesquisas brasileiras refletem, segundo Ferreira (2003), tendência de mudança mundial no modo como a formação inicial é estudada e desenvolvida. Dessa

forma, a formação de professores passa a ser compreendida como processo contínuo, em que o professor aprende a ensinar diante da visão de inter-relação entre teorias, princípios e modelos. Os estudos de formação consideram o professor objeto de estudo que desenvolve o processo de mudança de fora para dentro, esforçando-se para assimilar conhecimentos em base teórica.

As pesquisas internacionais de formação do professor indicam nova tendência de sua compreensão por meio do paradigma do desenvolvimento profissional. Por esses aspectos, os pesquisadores se dedicam a compreender quem é o professor de Matemática, como pensa e como se relaciona com sua prática, evidenciando a busca pela compreensão das mudanças internas do professor como objeto de estudo.

A partir de 2000, são criados no Brasil encontros para divulgação de pesquisas sobre Educação Matemática, como o caso do SIPEM, estruturado por grupos de trabalho, com o objetivo de reunir pesquisadores de instituições nacionais e internacionais para compartilhar pesquisas e formar parcerias. As tendências e perspectivas das pesquisas de formação de professores de Matemática vão evoluindo a cada encontro. No 1º encontro ocorrido em 2000, apresentam-se apenas três trabalhos dos 19 inscritos sobre "saber docente". O 2º encontro, em 2003, apresenta, de acordo com Nacarato e Paiva (2006), três focos temáticos:

- o professor como produtor de saberes;
- o professor como agente de sua própria formação;
- o professor e a pesquisa.

Em relação ao primeiro, os autores destacam a influência dos trabalhos de Shulman (1986) e Zeichner (1998) para as discussões sobre os saberes na formação do professor de Matemática. Em relação ao segundo, os autores destacam a nova tendência de estudos na área de formação de professores: o desenvolvimento profissional. Os temas mais discutidos foram os trabalhos coletivos e colaborativos. Já no terceiro, a ênfase das discussões se volta para a formação dos formadores de professores.

De acordo com Nacarato e Paiva (2006), as pesquisas não devem enfatizar somente a relação entre profissão docente e saberes, ou desenvolvimento profissional, mas ampliar o foco de estudo contemplando inclusive os processos de aprendizagem do professor, a constituição de sua subjetividade e de sua identidade.

Em relação aos procedimentos metodológicos, as pesquisas devem articular o referencial teórico adotado e a dinâmica discursiva e referenciar os instrumentos por meio da descrição detalhada dos procedimentos metodológicos utilizados.

2.4. As concepções dos licenciandos sobre o saber matemático

Pelas tendências das pesquisas sobre a formação de professores de Matemática, verifica-se que o saber matemático vai além do conhecimento específico do conteúdo, perpassa também pelos valores, crenças e concepções dos professores como objeto de estudo. O levantamento prévio das concepções pode auxiliar na compreensão da relação do professor com o saber matemático.

Ponte (1992) afirma que a concepção dos professores de Matemática, do saber matemático, na maioria, é absolutista e instrumental, já que a acumulação de fatos, regras, procedimentos e teoremas se tornam mais valorizados do que os aspectos de ensino dos conteúdos. Existem profissionais que assumem a concepção dinâmica do saber, considerando a Matemática como domínio em evolução conduzido por problemas e sujeito a revisões significativas.

Para o autor, os professores sabem pouca Matemática, o conhecimento é limitado e pouco profundo; apresentam ainda cultura Matemática reduzida, sabem pouco sobre sua História e Filosofia, e, suas principais áreas de aplicação. Os resultados de pesquisas, em Portugal, revelam que os professores apresentam dificuldade em falar sobre suas concepções da Matemática já que não têm o hábito da reflexão; apresentam uma visão geral e periférica do domínio escolar, e uma crise de identidade, não se percebem como matemáticos, nem como engenheiros.

Brito e Alves (2006), ao analisar a reformulação dos saberes pedagógicos, disciplinares e curriculares pelos licenciandos em Matemática, em Didática da Matemática, na UFRN, percebem que os professores têm concepções diferenciadas do saber matemático:

- a concepção da Matemática como potencialidade para o desenvolvimento do raciocínio lógico;
- a concepção histórica e instrumental;

- a concepção de que a Matemática é de difícil compreensão e destinada a poucas pessoas.

Uma concepção foi se desenvolvendo no grupo, na aplicação da pesquisa. Os licenciandos percebem que existe de fato a Matemática na vida diária das pessoas e é dever do professor explicitar aos alunos as relações entre Matemática do cotidiano e Matemática formal. A concepção dos futuros professores sobre o processo ensino-aprendizagem está pautada:

- na transmissão do conhecimento do professor para o aluno com a visão de que o professor é o detentor do saber;
- na dissociação entre teoria e prática com uma visão baseada no paradigma da racionalidade técnica de formação de professores;
- na desvinculação entre as teorias estudadas e a organização escolar;
- na utilização do livro didático como recurso que direciona o trabalho docente.

Pires, Silva e Santos (2006), em pesquisa com os coordenadores dos cursos de licenciatura, no Brasil, constatam que a preocupação dos profissionais está voltada para os conhecimentos que os alunos trazem para a Universidade. O aluno, para os profissionais, precisa ter a visão de professor dos conteúdos básicos e não mais a visão de aluno, já que seus conhecimentos são ainda muito frágeis.

Os objetivos dos cursos de licenciatura pautam-se na revisão e nivelamento dos alunos iniciantes, muito mais como uma retomada para amparar outras disciplinas do curso do que propriamente para revisar os conteúdos sob a perspectiva de docente. De acordo com as percepções dos coordenadores sobre o público, os licenciandos em Matemática, os autores revelam que as concepções básicas dos alunos sobre o saber matemático se apresentam de duas formas:

- ensinar Matemática depende do quanto se sabe sobre Matemática e não sobre o ensino de Matemática;
- ensinar Matemática depende do quanto se pode articular conhecimento matemático e pedagógico, a Matemática e o ensino.

Concluem, então, que saber conteúdo específico não significa saber ensiná-lo.

Apesar de as buscas em pesquisas de formação de professores de Matemática estarem voltadas para a compreensão mais subjetiva do professor, nos variados aspectos formativos, os resultados de concepção dos licenciandos sobre o saber matemático revelam um pensamento ainda voltado para o paradigma tecnicista da década de 1970.

O processo de transformação ocorre lentamente para as pesquisas brasileiras e para a reflexão e incorporação dos resultados nas instituições de ensino superior.

Ao constatar que a formação do professor de matemática apresenta configuração dicotômica entre disciplinas pedagógicas e matemáticas e, até mesmo, entre as disciplinas matemáticas entre si, é de se esperar que os licenciandos apresentem também perspectiva dicotômica em relação à própria formação. Mesmo com as contribuições das pesquisas nacionais e internacionais, na área da formação de professores e respectivas evoluções e conquistas, a modificação do paradigma tem acontecido lenta e gradualmente.

Nessa situação, este trabalho se utiliza de sugestões de pesquisadores que estudam a formação do professor de matemática. A importância de construção e desenvolvimento dos saberes matemáticos dos licenciandos, a exploração de seus conhecimentos conceituais, a busca pela compreensão das transformações cognitivas inerentes ao desenvolvimento do futuro professor são aspectos contemplados neste trabalho.

Assim, em face da proposta de Nacarato e Paiva (2006), esta pesquisa procura descrever os processos cognitivos dos licenciandos na aprendizagem docente, por meio do estímulo da reflexão e de visão mais profunda do conteúdo escolar. A tentativa busca minimizar os problemas apresentados por Ponte (1992), sobre os saberes dos licenciandos em matemática.

3. O CONCEITO DE FUNÇÃO: SABER ESPECÍFICO NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Este capítulo tem como finalidade apresentar, dentre os diversos saberes de Matemática, o saber específico do conceito de função. São apresentadas, a princípio, não só as dificuldades dos alunos da Educação Básica e Superior, na compreensão do conceito de função, mas também as dificuldades dos matemáticos, bem como as dificuldades dos próprios professores ao deparar com situações que necessitam desse conceito.

Sierpinska (1992) revela, em estudos epistemológicos, que o conceito de função, até alcançar o século XX, passa por diversos obstáculos: problemas relacionados à utilização do conceito na prática, problemas numéricos, algébricos e geométricos. Para os alunos da Educação Básica e Superior, diversos autores, entre eles Dubinsky e Harel (1992), Artigue (1992), Rêgo (2000) e Pelho (2003), revelam muitas dificuldades na compreensão desse conceito.

As dificuldades mais relevantes dizem respeito aos diferentes tipos de representação das funções, às suas transformações, a trocas conceituais entre o conceito de função e equação, aos conceitos de domínio, contradomínio e imagem de funções e a distinção entre variáveis dependentes e independentes.

Carneiro, Fantinel e Silva (2003) e Rossini (2006) afirmam que os professores em formação inicial e continuada, também apresentam erros conceituais nas concepções do conceito de função, bem como dificuldades na compreensão. É importante ressaltar que os problemas são semelhantes aos vivenciados pelos alunos da formação básica e superior, o que leva a crer que seja necessário o auxílio do professor em formação, no sentido de modificar sua concepção e de ressignificar os conceitos matemáticos, sobretudo o conceito específico de função.

Está sendo contemplado, neste trabalho, o estudo das variáveis e das representações algébricas a partir de situações que estimulem a reflexão do conceito de

função em várias frentes. A utilização de situações cotidianas e científicas e a resolução de problemas são aquelas contempladas pelos autores citados. Outra frente que pretende trazer contribuições inovadoras da problemática diz respeito à aprendizagem significativa do conceito de função.

3.1. As dificuldades na compreensão do conceito de função

As dificuldades na compreensão do conceito de função estão longe de ser problema específico dos alunos. Os próprios matemáticos, na evolução da ciência, depararam-se com dificuldades que modificaram sua compreensão do conceito levando a evoluções teóricas durante séculos, para serem estabelecidas e aceitas pela comunidade acadêmica.

Professores de matemática, alunos da Educação Superior e alunos da Educação Básica, assim como os matemáticos, também vivenciam as dificuldades na compreensão do conceito de função.

São apresentadas, então, as dificuldades vivenciadas por todos os níveis educacionais, de matemáticos, estudantes e professores, sobre a compreensão do conceito de função diante de resultados de pesquisas, nacionais e internacionais, que tratam do tema.

- **As dificuldades epistemológicas**

Os primórdios do conceito de função surgem com os babilônios e gregos, povos que introduziram tabelas de relações numéricas para explicação de fenômenos naturais. Entre os babilônios, as tabelas são construídas para relacionar quadrados e raízes quadradas, bem como cubos e raízes cúbicas. Para os gregos, a noção de função é estabelecida como relação especial entre entes geométricos.

Sierpinska (1992) apresenta, para esse momento, os primeiros obstáculos epistemológicos sobre Matemática:

- a Matemática não se preocupa com problemas práticos;
- não se preocupa também com técnicas computacionais usadas na produção de tabelas numéricas.

Na evolução do pensamento humano, no período aristotélico, a noção de função, ainda expressa por meio de tabelas ou por verbalizações, identifica os processos de alteração de quantidade e de qualidade de entes geométricos. A noção de função tem sentido relacionado à "mudança" de fenômenos, porém, sem generalizações. A ação mental de compreensão, segundo Sierpinska (1992) está relacionada com a identificação dos sujeitos de mudança por meio de estudo dessas mudanças.

Deriva daí o terceiro obstáculo epistemológico:

- a preocupação das mudanças como fenômeno focado na mudança e não no objeto que muda.

A partir do século XIII, cientistas europeus como Oresme, Galileu, Stevin e Newton relacionam as pesquisas com a concepção de número. Galileu, por exemplo, pautava-se nas mensurações, sobretudo nos estudos astronômicos. Oresme, por sua vez, trabalhando com latitudes, atribui aos números coletados valor qualitativo, estudando, inclusive, casos de dependência de quantidades variáveis.

A ação mental de compreensão da época pauta-se na generalização e síntese da noção de número. Surge daí, o quarto obstáculo epistemológico:

- a compreensão do mundo de acordo com a filosofia Pitagórica em que tudo é número.

Ao mesmo tempo, pensava-se também em quantidades e uma dúvida paira nas mentes dos cientistas: como diferenciar os conceitos de número e quantidade? Surge então nova ação mental de compreensão: discriminação entre as duas entidades. Discriminar número e magnitude física, por exemplo, tem significado diferente da percepção de relações entre leis físicas e funções Matemáticas. Assim, as sínteses da noção de número e as discriminações entre número e quantidade são necessárias para compreensão do conceito de função.

A partir do século XVI, a noção de função começa a ter novas representações. Aliadas ao aspecto geométrico, as expressões algébricas adentram o universo científico da época. Descartes define a noção de função segundo a equação em x e y que introduz a dependência entre quantidades variáveis, permitindo calcular o valor de uma variável em correspondência com o valor da outra.

Leibinz, em 1673, introduz a palavra função atribuindo-lhe o significado de relação entre segmentos de retas e curvas. Bernoulli, em 1718, constrói a primeira definição explícita de função de uma variável, definindo-a como quantidade composta por essa variável e por constantes. Euler, em 1748, traz novo conceito que revoluciona a

Matemática. Utilizando a definição de Bernoulli, Euler substitui o conceito de quantidade por expressão analítica, introduzindo assim o conceito algébrico para a definição de função.

Vem daí a concepção de função baseada em relações descritas por fórmulas analíticas, gerando o quinto obstáculo epistemológico:

- forte crença no poder das operações formais como expressões algébricas.

A ação mental de compreensão subseqüente expressa a necessidade de discriminação entre uma função e as ferramentas analíticas utilizadas para descrição de suas leis. No século XIX, Dirichlet, em 1837, constrói o conceito de função que traz inovações a partir da restrição do domínio da função a um intervalo.

Assim, Dirichlet define função: "Se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é função da variável x" (BRAGA, 2006, p.50).

Vem daí novo obstáculo epistemológico:

- a concepção de definição, considerada como uma descrição de um objeto, não é lógica, nem determina o objeto.

A ação de compreensão diante desse obstáculo é a discriminação entre a definição matemática e a descrição de objetos.

No século XX, na década de 30, Bourbaki traz nova concepção de função, baseada na Teoria dos Conjuntos. O conceito de função é definido, de acordo com o grupo de cientistas matemáticos, como operação que associa o elemento x de determinado conjunto a um único elemento y de outro conjunto com o primeiro relacionado. O ato de compreensão está relacionado com a discriminação entre os conceitos de função e relação.

Com o Movimento da Matemática Moderna, na década de 60, do século XX, a comunidade científica Matemática adota a concepção estrutural de função de Bourbaki. A idéia de dependência funcional é eliminada do conceito de função, com tendência a enfatizar as interpretações estruturais mais do que as processuais.

A construção do conceito de função dos matemáticos dá-se paulatinamente, ao longo de séculos, conforme as exigências da vida cotidiana e científica.

- **As dificuldades dos alunos da Educação Básica**

A dificuldade em compreender o conceito de função não é apenas nacional. Existem pesquisas internacionais que se propõem a descrever e explicar a situação do aluno que não compreende o conceito de função e do professor que não sabe articular conhecimentos para ensiná-lo.

As pesquisas com as dificuldades dos alunos do ensino básico e superior, por professores de Matemática em formação inicial e continuada e por professores em serviço, tiveram grande relevância a partir da década de 80.

Em revisão bibliográfica, Kieran (1992) apresenta resultados de pesquisadores como Markovits (1983) e Bruckheimer (1986) que evidenciam dificuldade dos alunos na passagem da forma gráfica das funções para a forma algébrica; Kerslake (1980), Yerushalmy (1988) e Kaput (1988), que mostram em pesquisas, as dificuldades dos alunos, em tarefas de interpretação de informações contidas em representações gráficas; Freudenthal (1982), a importância de enfatizar a noção de dependência na construção do conceito de função; e Cotret (1988) que denuncia a exclusão dos conceitos de variação e dependência na apresentação das definições modernas de função, tornando o conceito inacessível aos alunos do curso secundário já que não os permitem chegar à compreensão intuitiva de função.

As pesquisas estão evoluindo na busca da compreensão das dificuldades do conceito matemático, e na busca de investigação de situações que auxiliem o ensino e aprendizagem. Akkoç e Tall (2002), em pesquisa com estudantes secundaristas, concluem que o estudo de funções constantes evidencia perturbações na compreensão do conceito de função ao associá-la ao conceito de variação. Além disso, o conceito de função está baseado na definição coloquial de interligação de um conjunto de diagramas e respectivos pares ordenados. Os gráficos e as fórmulas são compreendidos por meio de exemplos conhecidos anteriormente.

Almeida e Scalon (2002), ao pesquisarem os fatores determinantes do ensino-aprendizagem de funções Matemáticas em alunos de 8ª série de escolas públicas e privadas da cidade de Três Corações – MG, concluem de forma quantitativa que, ao final do ano letivo, a maioria dos alunos não domina totalmente o conceito de função.

As pesquisas de Moura e Moretti (2003), sobre aprendizagem do conceito de função com estudantes de 8ª série, de escola pública paulista, que ainda não tinham estudado tal conceito, denotam que a grande dificuldade se encontra no fato de os

alunos não conseguirem generalizar os problemas por meio de formalização da linguagem.

Os estudos de Pelho (2003) com estudantes do 2º ano do Ensino Médio que já haviam estudado função na série anterior, constatam primeiramente que os alunos chegam ao Ensino Médio sem compreensão do conceito. Além de o conceito ser de difícil apreensão pelos alunos, estes preferem trabalhar com função utilizando a representação de expressões algébricas ou de relações numéricas. Porém, ao apresentar respostas a questões relacionadas ao conceito matemático, fazem-no por meio de linguagem natural, carente de clareza e rigor.

Lopes (2003), por sua vez, desenvolvendo pesquisa com os alunos de 8ª série, em escola da periferia do Estado de São Paulo, verifica que os alunos apresentam dificuldades na interpretação da representação gráfica e de sua conversão para a linguagem algébrica.

São muitas dificuldades do conceito matemático de função para os alunos da Educação Básica. A representação de função, seja ela na forma gráfica ou algébrica, bem como as respectivas interpretações, além da transformação de representação em outra, evidenciam o desconhecimento do conceito de função por parte dos alunos que saem do ensino básico e se voltam para o ensino superior.

As pesquisas com a compreensão do conceito matemático, em novo nível de ensino, demonstram falhas ainda mais profundas na estruturação e na utilização do conceito.

- **As dificuldades dos alunos da Educação Superior**

Dubinsky e Harel (1992), ao estudar os conceitos agregados ao conceito de função na visão de alunos ainda não graduados da Universidade de Purdue, Estados Unidos, relatam que os alunos geralmente podem vinculá-lo aos conceitos de letras, gráficos, pares ordenados, tabelas e equações. Apresentam dificuldades também na construção dos processos vinculados ao conceito de função e na autonomia para desenvolvê-los, confundindo as propriedades intrínsecas ao conceito de função, em suas relações.

Nos trabalhos de Artigue (1992), na Universidade de Paris, conclui-se que os alunos apresentam dificuldades na interpretação e nos registros geométricos e na relação

entre os aspectos cognitivos e didáticos, diante da utilização do conceito de função por eles internalizados.

As pesquisas de Mendes (1994) com estudantes universitários, nas disciplinas de Introdução ao Cálculo e Cálculo I da PUC/RJ, indicam que os alunos citam o termo equação ao se referirem à função, caracterizando-a como relação ou como expressão. Os alunos não estão cientes do conceito de domínio na definição de função, esperam uma peridiocidade simples e reconhecível no gráfico, não conseguem construir associações entre as representações algébricas, gráficas e tabulares de uma função, e estabelecem distanciamento entre o conteúdo de função estudado e seu significado.

Oliveira (1997), em pesquisa com alunos do primeiro ano de Engenharia da PUC/SP, constata também que os alunos relacionam o conceito de função ao de equação. Funções dadas por mais de uma expressão algébrica não são bem compreendidas pelos alunos, denotando ainda mais o fato destes não terem internalizado o conceito básico de função.

Rêgo (2000), ao desenvolver pesquisas com alunos dos Cursos de Engenharia Civil e Mecânica, na disciplina de Introdução ao Cálculo na UFPB, verifica que as deficiências em relacionar as representações algébricas e geométricas, ausência de conceitos de domínio, contradomínio e imagem de função, e a concepção pouco intuitiva e útil baseada muito mais no conceito de equação do que no conceito de variação de quantidades estão presentes.

Segundo revisão bibliográfica realizada de Almeida e Scalon (2002), as maiores dificuldades dos estudantes universitários, em relação ao conceito, relacionam-se ao registro na representação gráfica de função, na mudança para registro algébrico, nas definições de domínio e contradomínio, na construção de tabelas de valores numéricos, na distinção entre variável dependente e independente e na notação Matemática.

Bianchini e Puga (2004), por sua vez, ao aplicarem teste diagnóstico com os alunos do Curso de Ciência da Computação da PUC/SP na disciplina de Cálculo, observam que os alunos, na maioria, costumam fornecer definições por meio de exemplos, relacionam função com equação, apresentam dificuldades nas representações gráficas e na transformação destas em representações algébricas. Autores afirmam ainda que os alunos manuseiam com mais freqüência apenas um registro de representação simbólica por vez.

Nos universitários de Engenharia, Computação, Física, por exemplo, que utilizam o conceito como ferramenta básica para aquisição e aplicação de novos

conhecimentos, o comprometimento das dificuldades diz respeito mais ao aspecto pessoal, à possibilidade de mau desempenho acadêmico do próprio aluno.

Quanto aos alunos de formação em curso de Licenciatura e que têm como objetivo retornar à sala de aula no papel de professor, as falhas podem ser comprometedoras, não só para seu desenvolvimento pessoal acadêmico, mas também para a aprendizagem de seus futuros alunos.

- **As dificuldades dos professores de Matemática**

Pesquisas preliminares de Rossini (2006), na Formação Continuada de professores de Matemática da rede pública de Ensino de São Paulo, mostram que os professores confundem os conceitos de equação e de função. Tendo em vista a compreensão mais profunda do trabalho da autora, as atividades com o símbolo f(x) são as que mais suscitam dúvidas, para escrever as leis de formação dos problemas, e para estabelecimento da correspondência e dependência entre variáveis.

Nas atividades de construção de gráficos, denota-se o descaso com a escala, com construções que sempre caracterizam curva contínua para representação de dados discretos. Em relação aos diagramas de flechas, os professores preferem os conjuntos finitos no domínio e no contradomínio de cada função. Houve ainda, dificuldade na representação algébrica de funções, em estabelecer relação funcional entre proporcionalidades, na relação entre variáveis dependentes e independentes.

A dificuldade na compreensão do conceito de função perpassa por todos os níveis que retratam a relação ensino-aprendizagem e em diferentes aspectos do conhecimento do conceito. Os matemáticos historicamente superam obstáculos para alcance, depois de séculos, da formalização do conceito de função. Os professores de Matemática, por sua vez, também apresentam dificuldades em compreender, interpretar e atribuir significados ao conceito.

Os alunos do Ensino Superior apresentam uma concepção que não lhes garante o conhecimento necessário para o desenvolvimento de habilidades, em especial, o aluno que se dedica à formação docente. Com essa visão, realmente é de se esperar que os alunos do Ensino Básico tenham grandes dificuldades em compreender o conceito de função.

Por outro lado, as dificuldades não se apresentam de forma superficial. As trocas conceituais ou conceitos mal construídos, as representações e respectivas

transformações e os significados contraditórios atribuídos ao conceito revelam a necessidade de ações que vão além da mera investigação.

Nessa perspectiva, é necessário pensar a formação que possa modificar a conjuntura atual. Quais os conhecimentos de função, os professores precisam desenvolver em sua formação? Como esses conhecimentos teóricos podem ser abordados na formação?

3.2. Aspectos teóricos enfatizados do conceito de função na formação inicial do professor de Matemática

Os pesquisadores de dificuldades na aprendizagem do conceito de função, muitas vezes, dispõem de sugestões que objetivam possíveis soluções capazes de minimizar os problemas. As sugestões reunidas e classificadas pelas suas características básicas buscam auxiliar na compreensão do que está sendo pesquisado e aplicado na prática, em relação à aprendizagem do conceito de função.

O estudo dos gráficos como representação e significação do conceito de função é o conhecimento mais abordado pelos pesquisadores. Rêgo (2000) afirma que a manipulação de variáveis familiares aos alunos, em gráficos de jornais e revistas, pode facilitar a formação de idéias centrais do conceito de função. Trindade e Moretti (2000) acrescentam que o trabalho com gráficos deve ser realizado de forma diferenciada a fim de que o professor em formação possa visualizar padrões algébricos, além de perceber que existem gráficos não definidos algebricamente.

Os PCNEMs (2000), Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, também preconizam a representação e a análise gráfica de funções analíticas e não-analíticas, além de associá-la ao estudo de seqüências numéricas. Rossini (2006) sugere ainda que os professores sejam capazes de leitura pontual e global de gráficos e de utilizar escalas e construções adequadas para a função a ser representada.

Os estudos de tabelas são apresentados em pesquisas como representação necessária e útil para a compreensão do conceito de função. Sierpinska (1992) revela ser necessário um trabalho voltado para a interpolação numérica em tabelas para que as regularidades possam ser externalizadas e melhor compreendidas.

Meira (1997) também considera que o trabalho com tabelas é importante, pela representação e visualização de pares ordenados e construção de seqüências numéricas capazes de evidenciar as transformações. Rêgo (2000) evidencia que o trabalho com

tabelas é importante por serem estas mais familiares aos alunos, deixando-os mais à vontade no estudo do conceito de função.

Rossini (2006) destaca não só a leitura de tabelas como pertinentes para a ressignificação do conceito dos professores, mas também sua análise e respectivos significados. As tabelas, para a ressignificação do conceito de função, podem auxiliar os professores na visualização das regularidades numéricas, associando os resultados às representações gráficas, integrando, assim, os tipos de conhecimento de função.

O estudo e a compreensão de variáveis são outro assunto enfatizado pelos pesquisadores como pertinente ao aprendizado do conceito de função. Para Rêgo (2000), analisar experimento de decrescimento de variável dependente, como variável independente, com dados gerados, registrados e analisados pelo próprio aluno, pode causar impacto significativo e positivo nas estruturas mentais dos alunos sobre o conceito de função.

Trindade e Moretti (2000) acreditam que explorar o significado de variável, dependência, regularidade e generalização pode fazer com que os alunos compreendam de fato o conceito. Carneiro, Fantinel e Silva (2003) destacam a importância do estudo das variáveis a partir do momento que evocam relação unívoca e que seja perceptível para quem aprende ou ressignifica o conceito. Rossini (2006) também destaca sua importância e enfatiza a escolha e o estudo do tempo como variável independente, como fonte a ser utilizada para a compreensão do conceito de função.

As expressões algébricas, apesar de serem as mais valorizadas pelos professores, no ensino do conceito de função, devem ser apresentadas aos alunos sem deixar de relacioná-las aos demais aspectos de representação e de significação do conceito. Para Sierpinska (1992), as expressões algébricas devem aparecer como ferramentas na modelagem de situações da vida real ou científica. Para Barbosa e Darsie (2003), são as expressões que explicitam as leis que regem as relações entre as grandezas Matemáticas, como fórmulas.

Nos PCNEMs (2000), a expressão algébrica tem a função de auxiliar a construção de leis de formação de seqüência numérica. Para Rossini (2006), as expressões algébricas podem auxiliar os professores na visualização de funções definidas por mais de uma sentença, na identificação do coeficiente “a” em $y = ax + b$ como taxa de variação, bem como na construção do significado de $f(x)$ e das fórmulas para representação de funções.

A utilização de padrões geométricos e numéricos, como base para o desenvolvimento do conceito de função, é para Rêgo (2000) uma das formas de compreendê-la melhor, pelo estudo de formas de representação. Para Carneiro, Fantinel e Silva (2003), as transformações geométricas, sejam elas translação, rotação, homotetia ou reflexão de figuras, podem auxiliar a compreensão do conceito de função de acordo com perspectiva diferenciada e não usual. Para Rossini (2006) as transformações e configurações geométricas auxiliam no estudo do conceito de função já que possibilitam o desenvolvimento do processo de generalização.

As pesquisas revelam também que o estudo de funções, de acordo com modelos reais e científicos, pode auxiliar a compreensão do conceito matemático. Meira (1997) evidencia que experiências realizadas com modelos físicos podem auxiliar na compreensão e na utilização das funções lineares. Rêgo (2000) confirma que materiais instrucionais mecânicos, como roldanas e molas, em atividades voltadas para a compreensão do conceito de função, podem ser bastante úteis para definir regularidades e transformações. Rossini (2006) acredita ser necessário enfatizar também o estudo da função linear como modelo de proporcionalidade.

No que diz respeito ao estudo dos conjuntos para o ensino do conceito em questão, os autores divergem. Para Sierpinska (1992), o conceito de função pelos alunos da educação básica deve ser desenvolvido menos formalmente, mais voltado para as idéias de Dirichlet a respeito da dependência de variáveis e da relação de unicidade entre elas. No Ensino Superior, conceitos mais formais devem ser apresentados aos alunos, inclusive a definição de conceito mais moderno de função que inclui o da Teoria dos Conjuntos.

Rêgo (2000) acredita serem necessários utilizar diagramas de flecha para demonstração da imagem da função como expressão algébrica. Para Lopes (2003), as funções devem expressar as leis de correspondência estabelecidas entre conjuntos numéricos, evidenciando inclusive pares ordenados no plano cartesiano. Barbosa e Darsie (2003) evidenciam a importância do estudo dos conjuntos, acrescentando ainda a introdução do conceito de domínio, contradomínio e imagem, a relação de unicidade e totalidade, representação por diagrama de setas e formação de pares ordenados.

Rossini (2006) afirma que mais importante do que estudar esses conceitos é fazer com que o professor de Matemática observe, de uma forma crítica, as vantagens e desvantagens dos diagramas, do estudo do domínio, do contradomínio e da imagem. Os PCNEMs (2000) solicitam aos professores que enfatizem outras linguagens e

significados diferentes dos da Teoria dos Conjuntos. Carneiro, Fantinel e Silva (2003) acreditam ser desnecessária a introdução do conceito de função como tipo particular de relação no estudo dos conjuntos.

Apesar das controvérsias, acredita-se que o estudo das funções sob esse ponto de vista seja importante, para o professor em formação, para que possa reparar os conceitos mal construídos e aprofundar seu conhecimento, mesmo que não o utilize em sala de aula.

Além dos requisitos listados anteriormente com maior ênfase pelos pesquisadores da área, existem outros que podem auxiliar na compreensão do conceito de função. Sierpinska (1992) defende que os pré-requisitos são valiosos para quem inicia o estudo. É necessário que o aluno tenha cultura Matemática para que possa ter o mínimo de compreensão sobre do conceito.

Rêgo (2000) e Rossini (2006) identificam que aprender pela idéia de máquinas de entrada e saída pode auxiliar na compreensão. Os PCNEMs (2000) complementam que o conceito de função deve também ser estudado em seqüências numéricas, progressões e noção de infinito, variações exponenciais e logarítmicas, funções seno, cosseno e tangente e taxa de variação de grandezas.

3.3. Como os aspectos teóricos podem ser abordados no processo de aprendizagem do conceito de função

Apresentar aos alunos apenas os conteúdos de uma forma estanque, pode não contribuir para a compreensão do conceito de função. Dessa forma, as pesquisas enfocam, de uma maneira mais geral, sugestões de desenvolvimento nos alunos, do conceito matemático.

O aspecto das múltiplas representações de função é fator considerado importante em muitas pesquisas. Sierpinska (1992) afirma que dar aos alunos largo espectro das maneiras de se conceber uma função pode auxiliar na aquisição da flexibilidade no uso dos modos de representação e expressão das funções em estudo. Trindade e Moretti (2000) acreditam ser necessário oferecer aos alunos a oportunidade de familiarização com as diversas formas de representação de cada função, além de articulá-las de forma permanente.

Os pesquisadores afirmam ainda que, na representação gráfica, é importante serem trabalhados os gráficos de setores, de barras, histogramas e pirâmides. Para os

PCNEMs (2000), ao aprender o conceito de função, o aluno deve ser capaz de associar diferentes funções a gráficos correspondentes, além de saber ler as diferentes linguagens e representações de variação de grandezas.

Discutir semelhanças e diferenças entre causalidades e funcionalidades de relação é, para Sierpinska (1992), outro aspecto a ser considerado no desenvolvimento de trabalho para a aprendizagem do conceito de função. Os PCNEMs (2000) ressaltam que a percepção das relações e identidades entre diferentes formas de representação do objeto, bem como o reconhecimento da conservação contida nas igualdades, congruências e equivalências são aspectos a serem considerados na aprendizagem do conceito matemático.

A compreensão de regularidades e transformações pode ser imprescindível ao desenvolvimento do conceito de função na estrutura cognitiva do aprendiz. Sierpinska (1992) afirma que explicar as mudanças, encontrar as regularidades nas mudanças, e ainda explicar que mudanças acontecem e como acontecem, auxilia o aluno na compreensão do significado do conceito de função.

Para Trindade e Moretti (2000), o estudo analítico de funções deve surgir diante de atividades realizadas pelas representações numéricas e gráficas, com a finalidade de auxiliar o aluno a compreender as transformações e regularidades dos fenômenos. Rêgo (2000) traz afirmativas que confirmam o pensamento dos pesquisadores. Para a autora, observar mudanças dos fenômenos que nos cercam e perceber relações e regularidades nessas mudanças propicia aprendizagem mais significativa do conceito de função.

Para os PCNEMs (2000), os alunos devem ser capazes de identificar as regularidades e transformações de fenômenos por meio do estabelecimento de regras, algoritmos e propriedades, do reconhecimento da existência de invariantes ou identidades, da identificação das transformações entre grandezas ou figuras, da interconexão entre variáveis e da interpretação dessas regularidades em expressões Matemáticas.

Estudar o conceito de função, em situações contextualizadas, é a maneira de auxiliar a aprendizagem dos alunos na compreensão do conceito. Para isso, Sierpinska (1992) ressalta que se deve utilizar os conhecimentos de funções nas explanações dos fenômenos cotidianos e científicos. Meira (1997) revela que o professor em formação precisa aprender a pesquisar possibilidades pedagógicas que lhe permitam a criação de tarefas e de contexto de atividades e discussões que conduzam à participação do aluno e processo de construção de conhecimentos na sala de aula.

Os PCNEMs (2000) defendem que o conceito de função deve ser compreendido por meio de estudos e de exemplos que ressaltam os fenômenos da vida cotidiana, os fenômenos naturais, as grandezas de conhecimento científico, estabelecendo entre eles conexões que podem ser estudadas dentro e fora da Matemática.

O desenvolvimento da linguagem Matemática com caráter funcional é considerado pelos pesquisadores como relevante para a compreensão do conceito de função. Sierpinska (1992) considera necessário os alunos perceberem e verbalizarem os sujeitos das mudanças, no estudo das regularidades e transformações dos fenômenos escolhidos. Trindade e Moretti (2000) ressaltam a importância de linguagem própria para descrever a lei que rege os fenômenos, apresentando, para isso, argumentos que justifiquem a validade da lei para qualquer caso e em qualquer tipo de representação.

Rêgo (2000), porém, ressalta que o domínio de nova linguagem, como na linguagem conceitual, deve acontecer de uma forma gradual para que o aluno possa lidar com as dificuldades inerentes à representação de função. Para os PCNEMs (2000), a linguagem formal deve ser relativizada. Ainda assim, o aluno deve ser capaz de reconhecer e utilizar a linguagem algébrica nas ciências para modelagem de situações-problema.

A busca de significados na aprendizagem do conceito de função é um dos pontos chave para a compreensão do conceito. Meira (1997) afirma ser necessário buscar significados para os símbolos representados no papel. Carneiro, Fantinel e Silva (2003) revelam que repetir corretamente a definição de função não significa que o aluno ou o professor tenham conhecimento de funções. É necessário que o aluno em formação inicial também contemple os diferentes significados que podem ser atribuídos ao conceito.

Para isso, a aprendizagem deve se basear na construção de situações ricas de significados, com exemplos e identificações. Autores como Rêgo (2000), Costa e Thomaz Neto (2004) consideram ainda que privilegiar a resolução de problemas de aplicação deve ser estratégia a ser utilizada como ponto de partida na aprendizagem do conceito de função. Rêgo (2000) ressalta, ainda, a necessidade de abordagens alternativas à tradicional para a evolução do conceito de função.

Uma das dificuldades mais citadas pelos pesquisadores dos problemas de aprendizagem do conceito de função se relaciona ao fato de os alunos, de qualquer nível educacional, vincularem o conceito de função ao conceito de equação. As dificuldades

perpassam, com bastante freqüência, pela compreensão dos aspectos algébricos das funções, sobretudo no estabelecimento de relações de dependência entre variáveis.

Apesar de os autores constatarem que representações gráficas e as transformações destas em representações algébricas são dificuldades enfrentadas pelos mesmos alunos, optou-se, para pesquisa, o estudo da representação algébrica de funções. Possibilitar a compreensão das relações entre variáveis expressas por representações algébricas pode auxiliar os alunos no esclarecimento das diferenças entre conceitos de função e de equação. Os alunos podem inclusive compreender a necessidade das definições do domínio e do contradomínio de função, diante da representação algébrica.

Ao contemplar-se o estudo algébrico do conceito de função, utilizam-se os conhecimentos voltados para a compreensão dos fenômenos cotidianos e científicos, para que a aprendizagem se baseie em situações significativas. A reflexão de problemas e a análise das regularidades e transformações, nas relações entre as variáveis que representam os elementos do problema, são utilizadas em vários períodos da pesquisa.

Os aspectos apresentados estão sendo utilizados, conforme sugestões deste capítulo. Outros aspectos são inseridos na pesquisa e podem contribuir com novas sugestões para a aprendizagem do conhecimento. Conhecer como os alunos ressignificam o conceito de função, pelos conhecimentos adquiridos e como o transforma significativamente diante de processo interventivo que possibilite questionamentos e reflexões dos próprios conhecimentos, são aspectos inseridos neste trabalho a serem discutidos no próximo capítulo, sob a luz da Teoria de Ausubel, Novak e Hanesian (1980).

4. A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Para trabalhar o processo de ensino-aprendizagem do Conceito de Função, utiliza-se a teoria da Aprendizagem Significativa de Conceitos defendida por Ausubel, Novak e Hanesian (1980), bem como os autores que estudam e aplicam essa teoria: Moreira (1999), Praia (2000), e, Ribeiro e Nuñez (2004).

As idéias da Aprendizagem Significativa de Ausubel, os Princípios Programáticos e o princípio da Assimilação estão sendo utilizados na pesquisa como ferramentas úteis e princípios metodológicos que fundamentam a seqüência didática planejada e aplicada para a investigação da ressignificação do conceito de função, na formação inicial do professor de matemática.

4.1. A Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel

David. P. Ausubel, nascido nos EUA, desenvolveu seus trabalhos, na década de 60, com o objetivo de propor uma teoria de como se processa a aprendizagem não mecânica, com aplicabilidade em sala de aula. A proposta é estudar a aquisição da organização do conhecimento no ensino formal.

Ausubel, Novak e Hanesian (1980) defendem a tese de que a aprendizagem, por meio da metacognição, fazendo com que os alunos evoluam em níveis de conhecimento e utilizando-se de estratégias organizadas, pode ser mais efetiva já que se adequa melhor às dificuldades cognitivas encontradas no processo da construção mental do conhecimento por parte do aluno.

Essa aprendizagem é um processo que considera o conhecimento do aprendiz sobre o assunto. Ribeiro e Nuñez (2004) enfatizam que o objetivo a ser alcançado, na

Aprendizagem Significativa preconizada por Ausubel, é fazer com que o aluno aprenda utilizando os conhecimentos existentes em sua estrutura cognitiva. Pela relação entre o que se sabe e o novo conteúdo, dá-se a compreensão do assunto estudado com significado e não apenas memorização mecânica. Dessa forma, existe a integração do novo conhecimento ao que se sabe, cuja inter-relação possibilita a transformação de novas idéias em informação por meio de associações, trazendo significado ao novo.

Na visão de Moreira (1999), a Aprendizagem Significativa de Ausubel "é um processo por meio do qual uma nova informação se relaciona, de maneira substantiva (não-literal) e não-arbitrária, a um aspecto relevante da estrutura cognitiva do indivíduo" (MOREIRA, 1999, p.11). A não-arbitrariedade é a relação entre o material potencialmente significativo e as estruturas cognitivas especialmente relevantes do aprendiz denominadas de subsunçores. As novas idéias e conceitos são aprendidos com significado a partir do momento em que idéias e conceitos do próprio aprendiz estejam disponíveis em sua estrutura cognitiva servindo-lhe como pontos de ancoragem.

Subsunçor é, então, um conceito, idéia ou proposição já existente na estrutura cognitiva do aprendiz com a capacidade de ancorar nova informação para o sujeito lhe atribuir significado. A substantividade, por sua vez, é o que é incorporado na estrutura cognitiva do aprendiz, tornando-se substância do novo conhecimento por meio do estabelecimento de variadas representações para um único significado. Assim, para a aprendizagem significativa, as idéias e os conceitos não podem depender exclusivamente do uso de signos específicos, mas de uma variedade deles.

Em face das definições, as condições básicas a serem consideradas para a efetivação da Aprendizagem Significativa, de acordo com Ribeiro e Nuñez (2004), apresentam-se da seguinte forma:

- o novo conhecimento deve ser potencialmente significativo;
- a estrutura cognitiva prévia deve comportar a existência de inclusores prévios;
- o sujeito que aprende deve ter predisposição, atitude ativa a respeito do conteúdo de aprendizagem.

O fato de o conhecimento ser potencialmente significativo vincula-se a outras condições: o significado lógico da natureza do material e o significado psicológico da

relação entre material logicamente significativo e a estrutura cognitiva individual do aprendiz.

Para o material ter significado lógico, é necessário que se relacione, de maneira substantiva e não-arbitrária, às idéias e aos conceitos no domínio cognitivo humano. Essa característica é inerente ao próprio material e, segundo Moreira (1999), o conteúdo das disciplinas ensinadas na escola geralmente é apresentado com significado lógico, entre eles, o conceito de função.

Para o significado psicológico do material, é necessário que o relacionamento substantivo e não-arbitrário com a estrutura cognitiva do aprendiz, em particular, seja capaz de transformar o significado lógico do material em psicológico, tornando o conteúdo do material potencialmente significativo.

Moreira (1999, p. 22) conclui que "a emergência do significado psicológico depende não somente da apresentação, ao aprendiz, de um material logicamente significativo, mas também da disponibilidade, por parte desse aprendiz, do necessário conteúdo ideacional". O conhecimento prévio deve servir de matriz organizacional para incorporação, compreensão e fixação de novos conhecimentos, no momento da conexão com conhecimentos especificamente relevantes e pré-existentes, na estrutura mental do aprendiz.

A Aprendizagem Significativa pode ser subdividida em três (3) tipos diferentes de acordo com características específicas:

- representacional;
- conceitual;
- proposicional.

A Aprendizagem Representacional é a aprendizagem dos símbolos individuais e do que representam, ao se estabelecer a equivalência entre os símbolos arbitrários e seus correspondentes passando a remeter o indivíduo ao mesmo significado.

A Aprendizagem Conceitual é um caso especial da aprendizagem representacional. Os conceitos, as idéias e as categorias podem também ser representados por símbolos individuais e arbitrários, estabelecendo equivalência entre a palavra que representa o conceito e o próprio conceito.

A Aprendizagem Proposicional está relacionada com a aprendizagem dos significados das idéias expressas por grupos de palavras combinadas em proposições ou

sentenças. Pretende-se aprender o significado que vai além dos significados das palavras ou conceitos da proposição.

Da Aprendizagem Conceitual e da Proposicional, Ausubel, Novak e Hanesian (1980) fazem subclassificações:

- aprendizagem Subordinada;
- aprendizagem Superordenada;
- aprendizagem Combinatória.

No primeiro caso, o novo conhecimento está subordinado de forma hierárquica a uma idéia já existente. É a Aprendizagem Subordinada Derivativa, se a nova informação é aprendida como apenas um exemplo do conceito já existente. Por outro lado, tem-se a Aprendizagem Subordinada Correlativa quando o material aprendido é a extensão, modificação ou limitação de conceito previamente aprendido.

No segundo caso, os conceitos de estrutura cognitiva são reconhecidos como exemplos mais específicos na nova idéia vinculando-se a ela. Existe interação entre as âncoras originando outras mais abrangentes. No terceiro caso, a nova idéia não é considerada mais inclusiva nem mais específica do que outras novas idéias, e a aprendizagem ocorre por analogia.

A Aprendizagem Significativa pode acontecer de duas formas não dicotômicas como afirmam Ribeiro e Nuñez (2004):

- por Recepção, em que o aluno é o receptor das informações e as relaciona com o que tem internalizado mentalmente, criando novos significados;
- por Descoberta, em que o aluno constrói sozinho seu conhecimento relacionando-o com as idéias prévias a respeito do assunto abordado.

A Aprendizagem por Recepção e a Aprendizagem por Descoberta podem ser utilizadas em sala de aula de uma forma significativa. Para Ausubel, ambas são importantes e necessárias para o aprendiz. Qual delas utilizar depende do objetivo que se pretende alcançar. Moreira (1999, p. 16) afirma que “em termos de aprendizagem de conteúdo, o que é descoberto torna-se significativo da mesma forma que aquilo que é apresentado ao aprendiz na aprendizagem receptiva”.

Para Ausubel, Novak e Hanesian (1980), a estrutura cognitiva é formada pelo conteúdo total organizado das idéias do indivíduo, em área particular de conhecimentos. Os conhecimentos são organizados por meio do princípio da assimilação, processo que

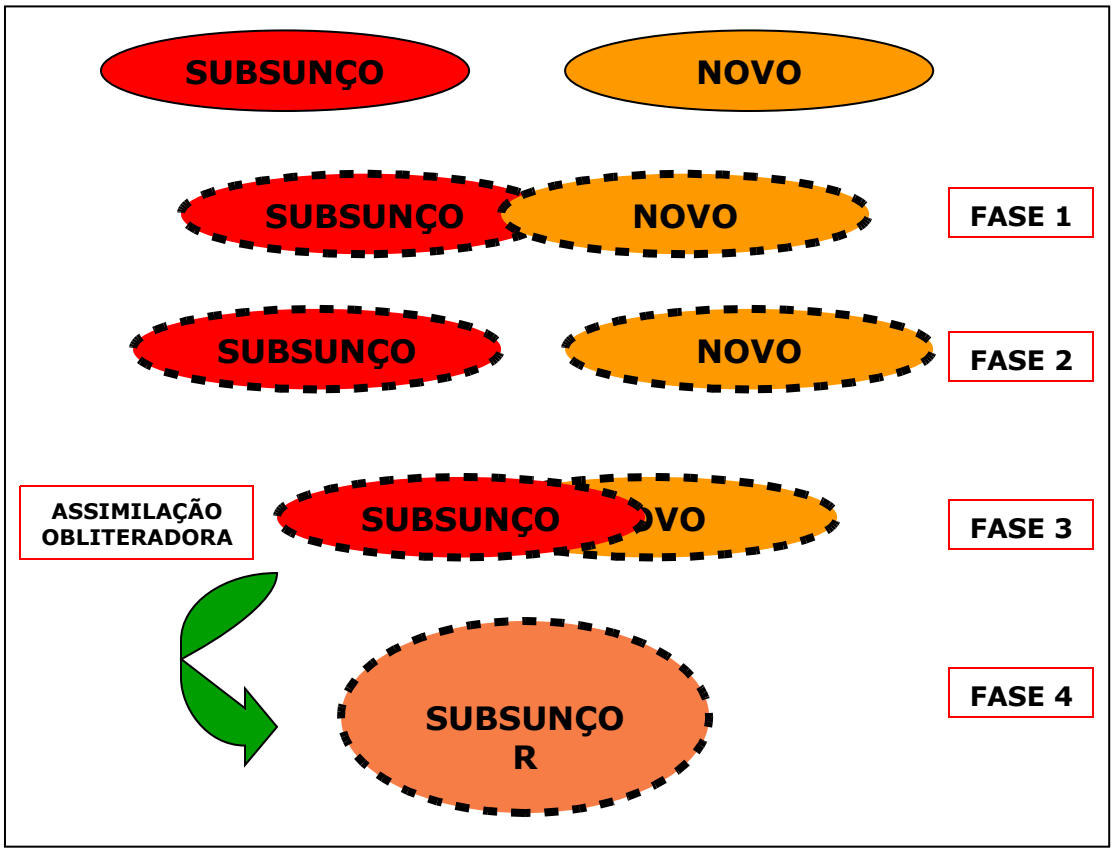
ocorre quando uma nova informação, potencialmente significativa, é relacionada e assimilada pelo conceito subsunçor da estrutura cognitiva do aprendiz.

A nova informação, ao ser apresentada ao aluno, sofre transformações. O mesmo ocorre com os subsunçores. As transformações se dão devido ao novo conhecimento entrar em contato com os subsunçores da estrutura cognitiva do aluno. Dessa forma, os elementos da estrutura cognitiva podem assumir nova organização e novo significado.

Cada grupo de idéias tem por base a idéia-âncora que pode ser um conceito ou proposição mais ampla que subordina outros conceitos na estrutura cognitiva e funciona como ancoradouro no processo de assimilação. O que acontece na Aprendizagem Significativa é que as novas idéias tornam-se progressivamente menos dissociáveis das idéias-âncora, até não estarem disponíveis individualmente.

A assimilação, (fase 1 da figura 4) inicia quando o novo conhecimento é apresentado ao aluno entrando em contato com os subsunçores, conhecimentos prévios a respeito do assunto. Com o contato, o subsunçor e o novo conhecimento se transformam e geram, como produto, um terceiro conhecimento, ainda em processo de elaboração.

Figura 4 – Modelo do processo de assimilação da Aprendizagem Significativa de Ausubel



Fonte: Elaboração própria

Ausubel, Novak e Hanesian (1980) afirmam que o produto interacional real do processo de aprendizagem significativa não é composto pelo novo significado do subsunçor, nem pelo novo significado do conhecimento, mas pelo significado do composto SUBSUNÇOR + NOVO CONHECIMENTO. A assimilação seqüencial de novos significados tem como resultado a diferenciação progressiva dos conceitos que proporciona refinamento de significados e o incremento do conhecimento para posterior aprendizagem significativa.

Após o estabelecimento de relações entre os conceitos, surgem novos significados, nem sempre compreendidos pelos alunos. Os que apresentam significado conflitante podem ser resolvidos por meio da reconciliação integradora. O significado do novo conhecimento recentemente modificado pode ser inicialmente dissociado da relação estabelecida com o significado do subsunçor também transformado. Os novos significados guardam ainda consigo algumas características básicas (fase 2 da figura 4).

À medida que o processo de assimilação continua, os significados não conseguem mais ser dissociados. O significado das novas idéias vão sendo assimilados ou reduzidos aos significados das idéias contidas nos subsunçores. Ausubel, Novak e Hanesian (1980, p. 108) afirmam que "é mais econômico e menos difícil fixar apenas os conceitos e proposições básicos mais estáveis e estabelecidos do que evocar as novas idéias que são assimiladas em relação às básicas". Assim, o significado do novo conhecimento torna-se progressivamente menos dissociável das idéias que compõem os subsunçores transformados, até deixar de estar disponível individualmente e ser esquecido (fase 3 da figura 4).

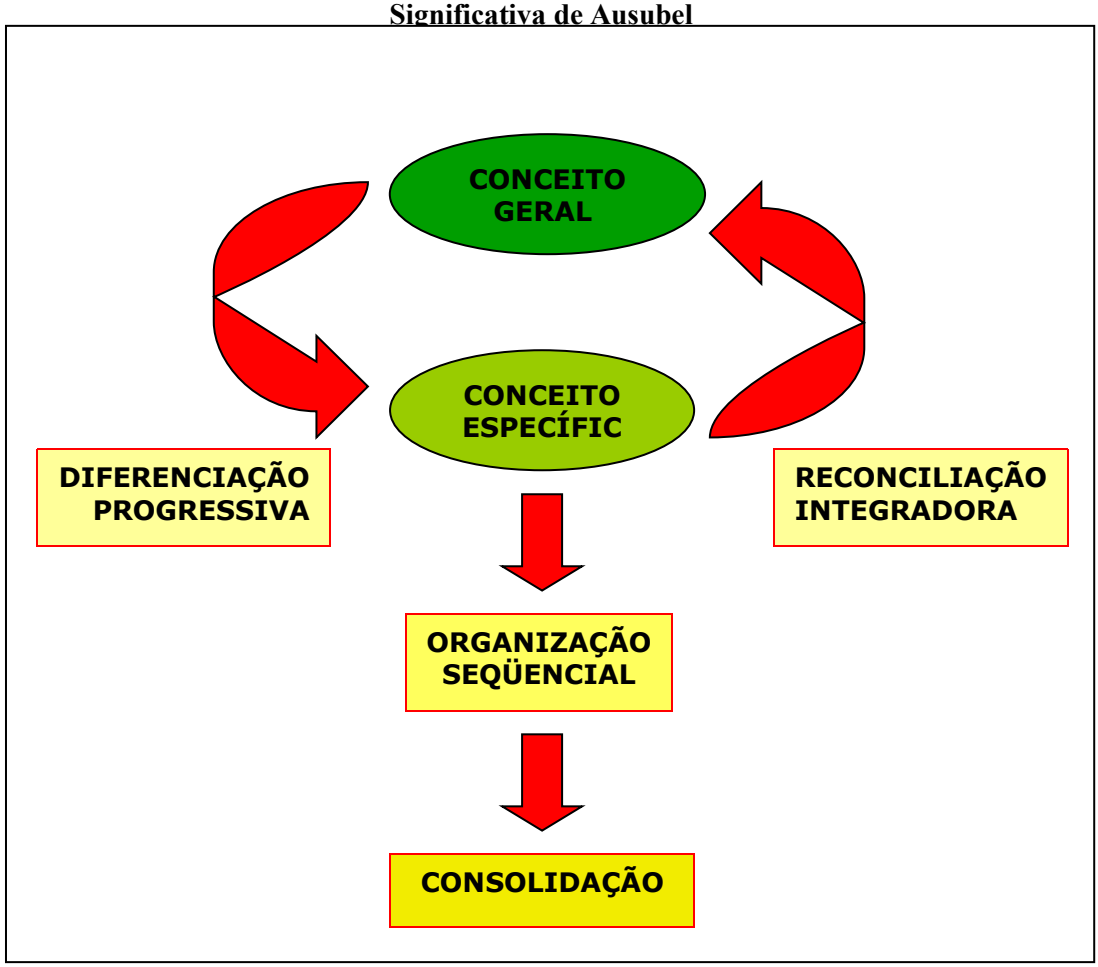
O produto interacional do subsunçor modificado e do novo conhecimento também alterado reduz-se ao próprio subsunçor modificado que se amplia incorporando definitivamente os novos significados (fase 4 da figura 4). Ao processo de "esquecimento" do novo conhecimento transformado atribui-se a denominação de assimilação obliteradora.

De acordo com Praia (2000), o desenvolvimento cognitivo é um processo dinâmico em que os novos conhecimentos estão em constante interação com os já existentes. Dessa forma, Ausubel, Novak e Hanesian (1980) propõem quatro (4)

Princípios Programáticos (figura 5) com a finalidade de auxiliar o professor na construção da Aprendizagem Significativa:

- Diferenciação Progressiva;
- Reconciliação Integradora;
- Organização Seqüencial;
- Consolidação.

Figura 5 – Esquema gráfico dos Princípios Programáticos da Aprendizagem Significativa de Ausubel



Fonte: Elaboração própria

Segundo Moreira (1999), o sistema cognitivo humano se constrói em hierarquia. As idéias mais inclusivas e explicativas ocupam o topo da estrutura e englobam progressivamente idéias, proposições, conceitos e fatos menos inclusivos. Além disso, torna-se mais fácil para o aluno perceber aspectos diferenciados do todo mais geral do que perceber as partes que compõem esse todo.

Na Diferenciação Progressiva, portanto, as idéias mais gerais e inclusivas devem ser apresentadas em primeiro lugar para que sejam diferenciadas em detalhes e nas

especificidades. Dessa forma, a Diferenciação Progressiva é definida como "parte do processo da aprendizagem significativa, da retenção e da organização que resulta numa elaboração hierárquica ulterior de conceitos ou proposições na estrutura cognitiva do 'topo para baixo'" (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p. 523).

A programação do conteúdo deve proporcionar a Diferenciação Progressiva do conhecimento, explorando as diferenças e semelhanças relevantes, com a finalidade de reconciliar inconsistências reais ou aparentes, preconizadas no segundo princípio, a Reconciliação Integradora, definida como "parte do processo da aprendizagem significativa que resulta na delineação explícita de semelhanças e diferenças entre idéias relacionadas" (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p. 526). A aprendizagem deve iniciar com os conceitos mais gerais, ilustrando os conceitos intermediários a eles relacionados para que seja possível introduzir em seguida os conceitos mais específicos, a partir do que retorna-se, por meio de exemplos, ao conceito mais geral na hierarquia, sem perder a visão do todo.

Os tópicos ou unidades de estudo devem ser seqüenciados de maneira coerente com as relações de dependência existentes no conteúdo a ser trabalhado. Este é o momento de fazer com que a nova informação se ancore aos conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva do aprendiz por meio da Organização Seqüencial dos conteúdos. Moreira (1999) recomenda a utilização de Mapas Conceituais desenvolvidos por Novak (1976) ou do Vê Epistemológico, preconizado por Gowin (1981).

Na Consolidação, o conteúdo deve ser explorado ao máximo fazendo uso de práticas e exercícios, antes de introduzir um novo conceito. Deve-se assegurar a alta probabilidade de êxito na aprendizagem seqüencialmente organizada. A dinâmica termina quando o aluno internaliza o conceito, compreendendo-o com significado.

São duas as maneiras de utilização da Aprendizagem Significativa na prática pedagógica:

- substantivamente, por meio da seleção de conteúdos básicos, da coordenação e da integração dos mesmos em diferentes níveis;
- programaticamente, ordenando a seqüência da matéria de estudo, respeitando a organização lógica interna do conteúdo juntamente com as atividades práticas.

Sabe-se que, para haver Aprendizagem Significativa, é necessário que existam idéias-âncora na estrutura cognitiva do aluno com as quais os novos conceitos venham a interagir, garantindo a assimilação do novo conhecimento. O que fazer quando não existem esses conhecimentos prévios apropriados? Ausubel, Novak e Hanesian (1980) defendem o desenvolvimento de recursos denominados Organizadores Prévios. Eles servem de âncora a novas aprendizagens proporcionando o desenvolvimento das idéias prévias.

Neste trabalho, entre os aspectos apresentados da Aprendizagem Significativa, a teoria que trabalha com mapas conceituais é a que está sendo utilizada com maior ênfase, especialmente para a organização dos conceitos de formação do conceito matemático de função. Os licenciandos, sujeitos ativos da pesquisa, podem, diante de representação gráfica, explicitar sua compreensão das discussões, apresentá-la para o grupo de trabalho e modificá-la diante dos erros técnicos ou conceituais cometidos.

4.2. **A Teoria dos Mapas Conceituais de Novak**

Os mapas conceituais foram criados por Joseph Novak, na década de 60, concomitantemente ao desenvolvimento da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel. Segundo Ribeiro e Nuñez (2004), os mapas conceituais são instrumentos de aprendizagem que se expressam por esquemas visuais com a intenção de possibilitar a representação das relações significativas dos conceitos estabelecidos pelos alunos.

Podem apresentar três tipos de interpretações: como estratégia, como instrumento e como recurso esquemático. Neste trabalho, os mapas conceituais têm conotação instrumental, já que são utilizados para orientar a construção do significado do conceito de função por meio de elaborações conceituais e de suas relações.

As características básicas que diferenciam os mapas conceituais de outros recursos gráficos e outras estratégias cognitivas, de acordo com Ontoria et al. (2005), são três: a hierarquização, a seleção e o impacto visual.

Nos mapas conceituais, os conceitos são trabalhados do maior para o de menor abrangência, sendo este primeiro denominado de inclusor. E, diante do processo hierárquico de construção do mapa conceitual, cada conceito só pode ser visualizado apenas uma vez. Em seguida, faz-se a escolha dos conceitos mais importantes por meio de síntese que contém o aspecto mais significativo do objeto de estudo. Segundo

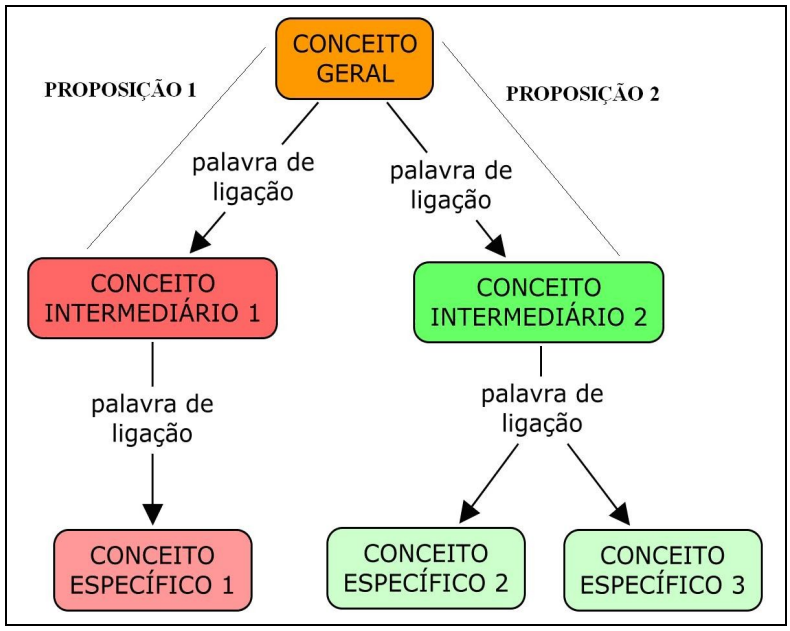
Ontoria et al. (2005), é necessário eleger os termos que referenciem os conceitos antes da construção. A sugestão do autor é que se trabalhe a confecção de mapas diante de variados níveis de generalidade: um mais abrangente que apresenta panorama global do assunto, e outro, mais específico, centrado em subtemas mais concretos.

O impacto visual é uma de suas características mais presentes e deve ser valorizada na construção, diante de apresentação concisa e simples, com esquemas visuais que diferenciem os conceitos inclusores dos demais, seja com letras diferentes, seja com contrastes ou representações geométricas. Por meio desse trabalho, as novas informações podem, na relação de inclusão, se relacionar com os subsunçores do aprendiz, de acordo com os pressupostos da Aprendizagem Significativa de Ausubel.

A estrutura dos mapas conceituais é formada por três componentes básicos: conceitos, proposições e palavras de ligação (figura 6). Os conceitos são símbolos que provocam imagens mentais permitindo a operacionalização com o mundo real e o mundo simbólico. De acordo com Ontoria et al. (2005, p. 44), os conceitos são "as imagens mentais que provocam em nós as palavras ou signos com os quais expressamos regularidades".

As imagens mentais apresentam elementos comuns para os indivíduos. Porém apresentam também a natureza pessoal peculiar a cada experiência acumulada pelo indivíduo da realidade. As proposições são formadas por dois ou mais termos conceituais atribuindo-lhes significado, formando, assim, a unidade semântica por meio da afirmação ou negação de característica do conceito. Para Ontoria et al. (2005), a proposição é a menor unidade semântica que pode afirmar ou negar alguma característica do conceito. As palavras de ligação são os elos entre os conceitos e mostram o tipo de relação entre eles, não provocando imagens mentais.

Figura 6 – Esquema gráfico da estrutura dos mapas conceituais



Fonte: Elaboração própria

Para Ontoria et al. (2005), a melhor maneira de auxiliar os alunos a aprender, de forma significativa, é ajudá-los na percepção da natureza dos conceitos e suas relações.

Os mapas conceituais são úteis a partir do momento que compilam poucos conceitos e idéias, que trabalham exemplos e análises de idéias simples e estabelecem a condição da representação dos conceitos de forma hierárquica. O autor destaca ainda a necessidade de isolar os conceitos e as palavras de ligação e da construção repetida de um mesmo mapa conceitual para que as falhas possam ser reparadas e a aprendizagem aconteça pela compreensão dos erros.

Paiva e Freitas (2005) afirmam existirem várias estratégias na construção de mapas conceituais. O que varia é a aplicação e os objetivos que se pretende atingir. No trabalho realizado pela leitura de artigos, livros ou textos, o objetivo é modelar a compreensão do aluno, em relação ao assunto e de como desenvolve a relação entre os conceitos. Para isso os autores destacam a seqüência básica de ações que podem auxiliar no trabalho de estruturação de seqüência didática, em sala de aula:

- leitura inicial do texto;
- releitura para destaque dos conceitos mais importantes;
- retirada das palavras ou expressões destacadas;
- organização das palavras;
- conexão entre elas pela utilização de verbo ou expressão que caracterizam a ação atribuindo-lhes significado; e,
- reorganização dos conceitos para que as interligações se tornem claras.

Na construção dos mapas conceituais, pelos conhecimentos prévios dos alunos, o objetivo passa a ser a verificação dos conceitos já incorporados, diante da representação gráfica, das ligações mentais e da interconexão entre os variados conhecimentos adquiridos, atribuindo-lhes significado. Assim, o procedimento a ser utilizado é basicamente o mesmo do caso anterior.

Em trabalho no curso de Licenciatura em Matemática, no CESAT, Espírito Santo, Paiva e Freitas (2005) adotam mapas conceituais para mapeamento dos conteúdos matemáticos das disciplinas de Fundamentos de Matemática Elementar, Geometria e Práticas Pedagógicas. Os alunos são levados a construí-los de acordo com estudos de conceitos primordiais de proporcionalidade. Os pesquisadores concluem que a maneira mais produtiva de utilizá-los no ensino e aprendizagem da Matemática é fazer com que os alunos produzam os próprios mapas conceituais, quando da sua familiaridade com o conhecimento. Nos resultados finais alcançados, os pesquisadores observam aumento na motivação pela aprendizagem da Matemática e a possibilidade de se trabalhar com vários conceitos simultaneamente, sem tornar o processo de ensino-aprendizagem árduo e cansativo.

Almouloud, Manrique, Silva e Campos (2004), em pesquisa financiada pela FAPESP, com os alunos da PUC/SP, cujo objetivo é investigar questões relacionadas à aprendizagem da geometria, nas séries finais do ensino fundamental a fim de reconhecer as representações dos professores, no que se refere ao papel da geometria, no processo de formação do aluno, contribuem com resultados significativos para a utilização dos mapas conceituais no ensino da Matemática.

O grupo buscou os mapas para levantamento das palavras na mente dos professores, relacionadas à palavra-chave dada a priori. Como cada professor é responsável pelo desenvolvimento do próprio mapa conceitual, é elaborado relatório explicitando a complexidade dos processos de mudança, após a aplicação da técnica dos mapas conceituais e da discussão dos diferentes mapas. Segundo os autores, "essa maneira de utilizar os mapas conceituais permitiu que o professor tomasse consciência do seu processo de mudança e refletisse sobre os fatores que o estavam influenciando" (ALMOLOUD; MANRIQUE; SILVA; CAMPOS, 2004, p. 12).

Os autores concluem que, apesar de os mapas serem diferentes para cada professor, houve muitas palavras iguais no grupo de professores. E, apesar de a utilização dos mapas estar relacionada com a criatividade, os autores percebem que seu

estudo conceitual indica que os usuários observam as ações necessárias para o ensino da geometria representativas de parcela importante no processo de ensino-aprendizagem.

Os mapas conceituais são citados como instrumentos no Projeto REDIN da UFRGS (2005), projeto voltado para disponibilização de recursos digitais interativos com o objetivo de auxiliar a prática de ensino em Educação a Distância na Formação de Professores em sala de aula. Os mapas conceituais, no caso específico, são utilizados para acompanhamento e avaliação de processos de conceituação atribuída pelos professores que utilizam recursos digitais. A justificativa dos autores, na escolha do instrumento, se baseia, entre outros fatores, na possibilidade de avaliação dos processos de conceituação dos aprendizes.

Para o estudo de ressignificação do conceito de função pelos licenciandos em matemática da UECE faz-se necessário primeiramente conhecer os subsunçores dos alunos deste conhecimento e de que forma os relacionam mentalmente. Pela compreensão, os novos conceitos são apresentados aos alunos para que possam iniciar o processo da aprendizagem significativa.

O estudo dos gráficos, das tabelas, das expressões algébricas e das inter-relações, de padrões geométricos e numéricos, de acordo com modelos de situações reais e científicas, de suas regularidades e transformações, são aspectos teórico-matemáticos considerados no desenvolvimento da seqüência didática que procura proporcionar uma aprendizagem com significado.

Os Princípios Programáticos são utilizados como base para o desenvolvimento do esquema metodológico da pesquisa. A fase das intervenções faz uso desse conhecimento para a estruturação de cada encontro com os alunos.

O Princípio da Assimilação é utilizado como base para a análise dos dados coletados nas intervenções. A análise é desenvolvida após as interpretações dos dados e busca identificar, a cada encontro, em qual das fases do processo de assimilação os alunos se encontram.

Os mapas conceituais são trabalhados com os professores em formação inicial, com o objetivo de explicitar, no momento da Organização Seqüencial, terceira etapa dos Princípios Programáticos da teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, como os alunos se organizam mentalmente ao relacionar os conceitos nas discussões com o conceito de função. Por serem os mapas instrumentos capazes de demonstrar o significado que o aluno atribui aos conceitos estudados e de revelar com clareza sua

organização cognitiva, é que se caracterizam como instrumentos importantes para a proposta da pesquisa.

O desenvolvimento do trabalho investigativo de ressignificação do conceito de função, na perspectiva da aprendizagem significativa de Ausubel, pode ainda não ter sido pesquisado. Dessa forma, compreender como os licenciandos em matemática reestruturam mentalmente o conceito de função, pela valorização de conhecimentos prévios, pode ampliar a compreensão que ainda hoje se tem das dificuldades que os alunos enfrentam, ao enunciar e ao utilizar esse conceito.

5. O PERCURSO METODOLÓGICO E A ETAPA DO LEVANTAMENTO

Define-se o percurso metodológico da pesquisa por meio de sua caracterização enquanto Estudo de Caso, da escolha do público alvo, da estruturação em etapas, e suas respectivas fases e períodos, bem como, o desenvolvimento da coleta e análise de dados baseados nos pressupostos de Stake (1998) e no princípio da Assimilação de Ausubel, Novak e Hanesian (1980).

Os primeiros momentos da pesquisa são evidenciados diante do desenvolvimento do estudo piloto no CEFETCE, na caracterização do curso de Licenciatura em Matemática da UECE e os contatos iniciais com o professor de Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral I e os alunos recém-ingressos na Universidade, período 2007.1.

5.1.O percurso metodológico

Diante das dificuldades dos licenciandos no estudo dos conceitos matemáticos, em sua formação, de uma forma que os permita refletir sobre os saberes, diante das dificuldades relacionadas especificamente à aprendizagem do conceito de função, é que se apresenta o percurso metodológico desta investigação. Questiona-se de que forma os alunos da formação inicial em Matemática ao aprenderem um conceito de forma significativa, transformam sua compreensão.

Esta pesquisa depende da lógica de planejamento e de estratégia baseada nos Princípios Programáticos da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel; preocupa-se com processos subjetivos e não propriamente com quantidades; investiga o fenômeno contemporâneo da vida real, na formação inicial do professor de Matemática; não exige o controle sobre eventos comportamentais, já que é importante para os resultados finais que os participantes estejam livres para expressar seu pensamento utilizando os instrumentos fornecidos (YIN, 2005). Dessa forma, a metodologia que atende às necessidades é o Estudo de Caso.

A pesquisa qualitativa de paradigma interpretativo traz como eixo temático ético a aprendizagem do conceito de função. Os temas émicos, de acordo com os pressupostos de Stake (1998), são os que podem surgir no decorrer da pesquisa, já que dizem respeito aos temas apresentados pelos próprios atores da investigação, no caso, os alunos de graduação da Licenciatura em Matemática.

O grupo de pessoas escolhido para representar a formação docente inicial em Matemática é composto pelos alunos do 1º ano da Licenciatura em Matemática da UECE, no período de 2007.1. Compreender os conhecimentos prévios dos alunos sobre o conceito de função e como se desenvolvem mentalmente, para atribuição de novos significados, pode auxiliar na caracterização dos alunos que ingressam na Universidade, especialmente sobre saberes em relação ao conceito de função.

Desenvolver o trabalho com todos os alunos matriculados, apesar de ser o ideal, torna a pesquisa inviável. Dessa forma, são selecionados quatro alunos representantes da turma de 2007.1 do período diurno. Os alunos do período noturno não o foram por falta de tempo extra para a participação na pesquisa. A seleção faz-se mediante diálogo entre pesquisadora e alunos, sobre o desenvolvimento da pesquisa nas primeiras aulas do semestre 2007.1, em junho desse mesmo ano. Os alunos escolhidos optam pela participação voluntária e se dispõem a participar dos encontros em horário extra curricular.

A escolha do horário é feita em conjunto e se justifica pela inviabilidade de aplicação em horário convencional, pelo fato de o conteúdo da pesquisa não estar diretamente e explicitamente relacionado aos conteúdos da grade curricular.

A pesquisa se subdivide em duas etapas (figura 7):

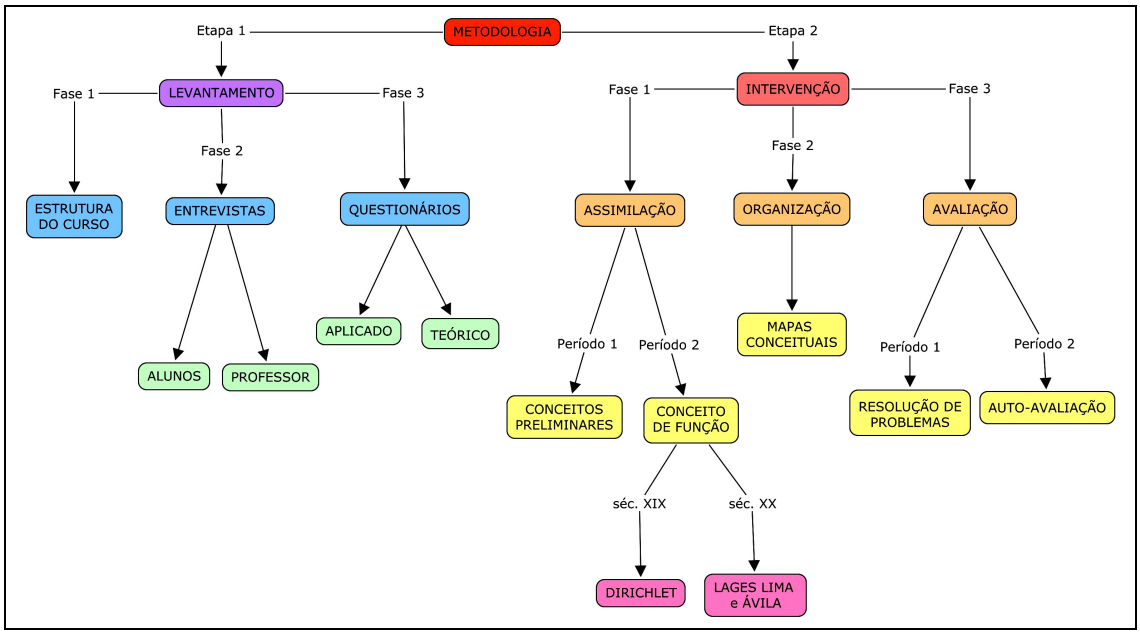
- etapa do Levantamento; e
- etapa da Intervenção.

Na primeira etapa, como são investigados os conhecimentos prévios dos alunos sobre o conceito de função, a pesquisa apresenta caráter exploratório. Na segunda, como são investigadas as diferentes maneiras de transformação do conceito de função para os alunos da formação inicial em Matemática, tem caráter descritivo.

O objetivo do Levantamento é contextualizar o estudo e conhecer o público da pesquisa com:

- a apresentação da estrutura do curso de Licenciatura em Matemática da UECE, no período 2007.1;
- entrevista com o professor da disciplina de Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral I do período diurno;
- entrevistas com os alunos voluntários;
- o desenvolvimento dos questionários teórico e aplicado relativos aos conhecimentos prévios sobre o conceito de função e conceitos subjacentes.

Figura 7 – Estrutura da Metodologia da pesquisa



Fonte: Elaboração própria

A investigação da estrutura do curso de Licenciatura em Matemática da UECE foi realizada pela análise documental da grade curricular do curso, da carga horária disponível para o semestre 2007.1 e da ementa da disciplina de Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral I. A análise procura demonstrar a ênfase às disciplinas de conhecimentos matemáticos comparativamente às disciplinas de conhecimentos não matemáticos, à disponibilidade de tempo dos alunos, aos conteúdos específicos da disciplina, momento de estudo do conceito de função.

A entrevista semi-estruturada com o professor da disciplina apresenta roteiro específico (Apêndice I) e busca compreender, de forma mais aprofundada, a estrutura da disciplina e a justificativa de sua carga horária maior do que as demais disciplinas do curso. Também são abordados, na entrevista, os saberes dos alunos ao ingressarem na Universidade, interesses profissionais e dificuldades em relação aos conhecimentos matemáticos, mais especificamente, em relação ao conceito de função.

A entrevista com alunos voluntários também é semi-estruturada, com roteiro específico (Apêndice II). Conhece-se o perfil dos alunos pela história de vida escolar, de

seus interesses profissionais, das dificuldades em relação aos saberes escolares, e, mais especificamente, o que eles compreendem sobre o conceito de função e os conceitos a ele relacionados. As entrevistas são gravadas com o consentimento dos participantes, posteriormente transcritas, armazenadas e catalogadas em banco de dados.

Os questionários são aplicados em dois momentos (Apêndice III):

- questionário teórico; e
- questionário aplicado.

A finalidade desse instrumento de investigação é buscar a compreensão mais aprofundada dos conhecimentos prévios dos alunos, em relação ao conceito de função e as relações entre ele conceito e conceitos subjacentes. Como pensar os conceitos e suas relações de forma teórica pode ser diferente de pensá-los de forma aplicada, a subdivisão auxilia na compreensão de possíveis contradições e inconsistências conceituais dos alunos, no momento inicial.

O questionário teórico contempla perguntas do conceito de função e dos conceitos diretamente relacionados: domínio, contradomínio e imagem, bem como perguntas sobre o conceito de equação, expressão algébrica, variável, incógnita, variável dependente e variável independente.

O questionário aplicado subdivide-se em duas partes relativas aos conjuntos e às representações algébricas. A subdivisão se justifica pelo fato de os alunos geralmente, de acordo com pesquisas citadas no Capítulo 3, estudarem e relacionarem o conceito de função ao conceito de conjuntos e o confundirem com o conceito de equação. As respostas obtidas nos questionários (Apêndice IV) são armazenadas em banco de dados.

O objetivo da Intervenção é descrever o processo de ressignificação do conceito de função, subdividindo-o em três fases, conforme pressupostos de Ausubel nos Princípios Programáticos da Aprendizagem Significativa (figura 7):

- Diferenciação Progressiva e Reconciliação Integradora (fase 1);
- Organização Seqüencial (fase 2); e
- Consolidação (fase 3).

Na fase 1, os alunos são estimulados à discussão sobre o conceito de função e os conceitos subjacentes e a organizá-los, de forma hierárquica descendente, do conceito abrangente para o específico e ascendente, do conceito específico para o abrangente. Ela compreende três períodos:

- conceitos preliminares;

- conceito de função de Dirichlet;
- conceitos de função de Lages Lima e Ávila.

No primeiro período, o objetivo é refletir sobre os conceitos subjacentes ao conceito de função: conceito de equação, expressão algébrica, variável, incógnita, variável dependente e independente, e, possíveis relações. No segundo, os alunos têm o primeiro contato com o conceito de função para que desenvolvam a reflexão sobre a relação de unicidade entre variáveis e o conceito de função. No terceiro, os alunos fazem contato com outras definições formalizadas sobre função: definições de Elon Lages Lima e de Geraldo Ávila.

O terceiro período é inserido na pesquisa, devido à necessidade dos próprios alunos do grupo, em definir função utilizando conhecimentos prévios sobre conjuntos. O objetivo é estimular a reflexão dos alunos sobre a necessidade de se definir função a partir dos conjuntos, bem como a necessidade da definição de regra para verificação das condições de existência e de unicidade.

Na fase 2, organização seqüencial, os alunos são estimulados a construir mapas conceituais dos conceitos discutidos e organizados na fase anterior, integrando-os em uma única representação. Essa fase tem subdivisões. Inicialmente os alunos compreendem o conceito de mapas conceituais, seus elementos, composição e estratégias de construção. Posteriormente, constróem mapas conceituais do conceito de função e conceitos subjacentes para verificar como cada grupo organiza os conceitos e estabelece as relações.

No terceiro momento, os alunos criticam os mapas conceituais dos colegas e desenvolvem novos mapas conceituais em face das críticas dos colegas e pesquisadora. O objetivo é verificar de que forma os alunos modificam ou não a maneira de pensar o conceito de função e organizá-lo de forma esquemática.

Na fase 3, consolidação, os alunos aplicam seus conhecimentos na solução de problemas sobre função utilizando os conceitos apresentados e discutidos em fases anteriores. O objetivo é verificar como os alunos utilizam esse conceito na aplicação de situações práticas e modelagem de problemas, destacando, sobretudo, os conceitos considerados mais relevantes.

No último encontro, os alunos são submetidos a uma auto-avaliação. Os questionários são-lhes devolvidos para que as modificações conceituais relevantes sejam executadas. Esse momento também é destinado à avaliação de todo o processo

vivenciado na intervenção. O objetivo principal é verificar se o aluno percebeu seu desenvolvimento durante o processo proposto e de que forma essa percepção contribui para alterar a compreensão do conceito de função.

Em cada encontro da Intervenção, as discussões são gravadas em vídeo e posteriormente transcritas (Apêndice V). Os alunos desenvolvem trabalho escrito, com suas próprias palavras, nos protocolos de intervenção (Apêndice VI). Além disso, os conceitos formalizados teoricamente são utilizados como terceira fonte de dados, como base comparativa para as informações obtidas.

A coleta de dados se baseia em várias fontes de evidência. Documentos, transcrições de entrevistas, questionários semi-estruturados, protocolos escritos, transcrições das intervenções e textos com conceitos teóricos são instrumentos-chave de comprovação das evidências. Os dados coletados são organizados em tabelas, com o auxílio do software Access da Microsoft, que possibilita que, com a entrada de dados da tabela básica, as informações sejam reagrupadas em outros formatos, automaticamente, de acordo com a necessidade dos elementos da pesquisa.

A análise dos dados se fundamenta nos pressupostos de Stake (1998), buscando-se a compreensão dos fenômenos por meio da descrição dos fatos obtidos de forma cronológica sem esperar explicação causal. Dessa forma, os episódios são observados e representados por meio de interpretação direta dos relatos para que o leitor possa compreender o fenômeno estudado, observado e analisado de uma maneira mais geral para que os aspectos mais singulares possam ser aprofundados de forma gradativa, pelo conhecimento do grupo e de suas inquietações.

A análise dos dados é pela interpretação direta dos dados coletados buscando-se encontrar os significados dos acontecimentos e suas inter-relações. Destaca-se o tempo, o lugar e as pessoas envolvidas, diante de explicações narrativas, apresentações cronológicas e descrições personalistas, com o intuito de fornecer informações para o desenvolvimento de generalização naturalista pelo próprio leitor por meio de experiência indireta.

A estratégia de análise se baseia na triangulação dos dados obtidos a fim de garantir a validação da pesquisa, ao tentar reduzir, ao mínimo, as falsas representações e interpretações. De acordo com a tipologia de estratégias de triangulação de Stake (1998), são utilizados dois tipos:

- triangulação de fontes de dados; e
- triangulação metodológica.

No primeiro caso, verifica-se como os alunos compreendem o conceito de função, ao serem estimulados de diferentes maneiras, em cada encontro da Intervenção: conceitos teóricos, verbalizados e escritos. No segundo caso, confronta-se os resultados obtidos com os dados coletados em diferentes instrumentos, entrevista, questionário e intervenções. Com o enfoque múltiplo, esclarecem-se influências externas.

A pesquisa tem início em maio de 2007, com a aplicação de pesquisa piloto, cujo objetivo é testar os instrumentos produzidos para as etapas previstas e a conduta da pesquisadora. A aplicação é realizada no CEFETCE, pela instituição apresentar características semelhantes às da UECE, no que diz respeito à formação inicial de professores de Matemática.

Após modificações de instrumentos e reflexões sobre a forma de conduta da pesquisadora, na aplicação das intervenções, a pesquisa é aplicada na Universidade Estadual do Ceará, entre os meses de junho e outubro de 2007. Os detalhes específicos de cada momento da pesquisa são apresentados nos capítulos subseqüentes.

5.2. Os primeiros momentos da pesquisa

O estudo piloto desenvolvido no CEFETCE é fundamental para a escolha das atividades e problemas matemáticos relacionados ao conceito de função e, também, para a compreensão de como aplicar a pesquisa. O levantamento da estrutura e o do funcionamento do curso de Licenciatura em Matemática na UECE auxilia a estruturação da pesquisa e a compreensão da disciplina de Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral I na qual se ensina o conceito de função.

Os primeiros encontros com os alunos recém-ingressos à Universidade, turma 2007.1, são decisivos para a definição e caracterização do público da pesquisa: alunos voluntários comprometidos em trabalho extracurricular.

5.2.1. O Estudo Piloto

A Pesquisa Piloto tem o objetivo de testar os instrumentos da pesquisa propriamente dita e avaliar a conduta da pesquisadora na aplicação desses instrumentos, especialmente na intervenção. A pesquisa preliminar é realizada com os alunos do CEFETCE, turma 2007.1 do Curso de Licenciatura em Matemática, entre os meses de maio e agosto. Pelo fato da instituição apresentar perfil semelhante ao da Universidade

Estadual do Ceará, ao formar futuros professores de matemática, sobretudo por se tratar de alunos recém-ingressos na Educação Superior, é que se faz a escolha dessa instituição.

Os primeiros contatos com a Coordenadora do Curso e o professor da disciplina de Fundamentos de Matemática dão-se em maio de 2007. Após entrevista com o professor da disciplina, agenda-se a data para a apresentação da proposta de participação da pesquisa aos alunos do CEFETCE como voluntários. O primeiro encontro aconteceu em junho de 2007. Seis alunos se apresentam como voluntários, apenas cinco, porém, puderam participar dos encontros pela disponibilidade de horário extra.

O segundo encontro, com os alunos já selecionados, faz-se no mesmo mês de junho, com os seguintes objetivos: definir as regras de atuação de alunos e pesquisadora para encontros subseqüentes, sobretudo as intervenções, e, assinar o termo de participação da pesquisa exigido pelo Comitê de Ética, bem como fornecer os dados pessoais.

As entrevistas são feitas com apenas dois alunos em 20/06/07, pela manhã, nas instalações do próprio CEFETCE. Os questionários, teórico e aplicado, sobre o conceito de função e seus conceitos subjacentes são desenvolvidos com os cinco alunos voluntários em 26/06/07, na própria instituição. Devido o grupo ter utilizado tempo bastante longo para as respostas e considerar cansativa a tarefa, decide-se que, na pesquisa da UECE, os questionários seriam distribuídos em dias diferentes.

Acerta-se com o grupo que as intervenções acontecem duas vezes por semana, à tarde. Assim, a primeira intervenção é em 03/07/07, no CEFETCE. As discussões conceituais teóricas da primeira fase da pesquisa dão-se em seis encontros, terminadas em 31/07/07. Para discussão e construção dos mapas conceituais do conceito de função, são feitos dois encontros, com término em 07/08/07. O último, em 14/08/07, é destinado à resolução de problemas.

A participação dos alunos no processo não é muito regular. Dois alunos desistem logo no início das atividades, por motivos pessoais. Outros dois fazem-no na metade do processo interventivo. Apenas um aluno participa de todos os encontros.

As fases da pesquisa, após a pesquisa piloto, são as mesmas. Porém a seqüência dos conceitos discutidos é alterada. As relações entre os conceitos mais abrangentes e os mais específicos são respeitadas, de acordo com os pressupostos da Teoria de Ausubel, Novak e Hanesian (1980), para a compreensão mais profunda do pensamento do aluno

ao realizar as conexões conceituais. É importante ressaltar que a pesquisa piloto e a da UECE se desenvolvem paralelamente, com intervalo de tempo determinado. Ainda assim, a pesquisa do CEFETCE esteve sempre à frente da desenvolvida na UECE, conservando os seus propósitos.

O aspecto mais importante da pesquisa piloto, de grandes contribuições à pesquisa da UECE, relaciona-se ao comportamento da pesquisadora. Os papéis de professora e de pesquisadora, inicialmente, confundem-se na aplicação da pesquisa piloto. Para separá-los, a pesquisadora busca, em todos os momentos, diferenciar os objetivos próprios do professor, dos objetivos próprios do pesquisador. Ao final do processo, a pesquisadora compreende seu papel e se considera apta a desenvolver as intervenções voltadas aos interesses da pesquisa e não aos da sala de aula, como professora.

5.2.2. A Estrutura do Curso de Licenciatura em Matemática da UECE em 2007.1

O curso de Licenciatura em Matemática da UECE prepara licenciados para o Ensino Médio, com direito a lecionar Ciências e Matemática no Ensino Fundamental. O objetivo geral do curso, de acordo com a proposta curricular, é dotar o profissional docente de base instrumental para desenvolvimento de projetos de pesquisa e extensão, que possibilitem a produção do conhecimento, contribuindo para o desenvolvimento científico e cultural do Estado do Ceará. Ele pode ser cumprido no prazo de 4 a 7 anos, desde que concluídos 168 créditos dispostos em 2.790 horas. Pode ainda ser no período noturno ou diurno.

Pela análise da grade curricular do semestre de 2007.1 (Anexo I), o curso oferta 29 disciplinas obrigatórias, entre elas, 16 de estudo do Cálculo Diferencial Integral, da Geometria Euclidiana, Analítica e Descritiva, do Desenho Geométrico, da Álgebra, da Teoria dos Números, do Cálculo Numérico e da Estatística Descritiva. As demais dizem respeito à disciplina Introdutória ao curso e à Universidade, às voltadas para as novas tecnologias, às específicas de Ciências e às Humanas que contemplam o estudo da Psicologia Evolutiva e da Aprendizagem, Didática Geral, Estrutura e Funcionamento do Ensino Fundamental e Médio e as disciplinas de Prática de Ensino de Ciências e de Matemática. No 1º semestre, mais especificamente, os alunos optantes pelo horário diurno, têm as aulas concentradas no período da tarde.

As disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática da UECE, do referido semestre, são as seguintes:

- Introdução à Universidade e ao Curso;
- Geometria Euclidiana I;
- Fundamentos da Computação;
- Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral I.

A Introdução à Universidade e ao Curso, com um total de 30 horas/aula, é ministrada quinzenalmente. Geometria Euclidiana I, com 60 horas/aula, e Fundamentos da Computação, com 90 horas/aula, são realizadas no horário AB, entre 13h30min e 15h10min, respectivamente, às terças-feiras e quintas-feiras, e às segundas-feiras, quartas-feiras e sextas-feiras, de forma intercalada na semana. Fundamentos e Cálculo Diferencial e Integral I, com maior carga horária, 150 horas/aula, é ministrada diariamente, de 2ª à 6ª feira no horário CD, entre 15h30min e 17h.

A disciplina de Fundamentos e Cálculo Diferencial e Integral I contempla o saber matemático a ser abordado e o conceito de função. Seus objetivos contemplam a revisão de tópicos estudados no 2º grau e a introdução do cálculo diferencial e integral, propriamente dito (Anexo II). O primeiro conteúdo programático da disciplina é o conceito de função, conjuntos numéricos, tipos de funções e respectivas correlações entre conceitos de equação, progressão aritmética, progressão geométrica, trigonometria e números complexos. Os próximos conteúdos contemplam os conceitos de limite e continuidade, de derivada, integral definida e indefinida, bem como as aplicações em situações científicas e cotidianas.

Apesar de a disciplina apresentar tópicos semelhantes aos da pesquisa, sobretudo os que dizem respeito ao conceito de função, a pesquisa não pôde ser desenvolvida no horário convencional de aula. A disciplina é de um conteúdo programático extenso, na qual vários conceitos, teoremas e aplicações são desenvolvidos. A pesquisa interventiva, por sua vez, exige desenvolvimento de longo prazo. Os fatos levam a pesquisadora a optar pelo trabalho em horário extra curricular, sem coincidência com o horário da tarde.

Com a análise das informações, a pesquisadora entra em contato com o Coordenador do Curso e com o professor específico da disciplina de Fundamentos e Cálculo Diferencial e Integral I para conhecer e autorizar o desenvolvimento da pesquisa com os alunos recém-ingressos na Universidade, no período de 2007.1.

5.2.3. Os primeiros contatos com a turma do Curso de Licenciatura em Matemática da UECE de 2007.1

Os alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UECE, no período de 2007.1, matriculados em Fundamentos e Cálculo Diferencial e Integral I, totalizam 56: 11 mulheres e 45 homens. O primeiro contato com a turma dá-se em 26/06/07, 20 dias após o início do ano letivo. O professor de Fundamentos e Cálculo Diferencial e Integral I cede tempo para a pesquisadora explanar o trabalho da pesquisa de mestrado e convidar os alunos interessados.

Terminada a aula, os alunos identificados com a proposta se aproximam para compreender melhor os detalhes do trabalho. São apresentados os objetivos e as fases da pesquisa, as regras de atuação da pesquisadora e as regras de operacionalização da pesquisa, incluindo a necessidade de filmar as intervenções. Como a pesquisa se faz em horário extra curricular, dos 10 alunos interessados em participar, apenas 4 realmente confirmam presença no próximo encontro, do dia 02/07/07, sendo 3 mulheres e 1 homem.

Inicialmente, os encontros subseqüentes poderiam ocorrer às terças-feiras e quintas-feiras, entre as 17h e 18h, em sala de aula, onde é ministrada a disciplina de Cálculo I. Resolve-se que, nos próximos encontros, serão realizadas entrevistas, com termo de consentimento livre e esclarecido, exigido pelo Comitê de Ética, e preenchida a ficha com os dados pessoais de cada aluno.

5.3. As Entrevistas

As entrevistas têm o objetivo de caracterizar e conhecer melhor os alunos participantes da pesquisa, recém-ingressos à UECE no período letivo de 2007.1. Com a entrevista do professor de Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral I, procura-se compreender a estrutura da disciplina, bem como os conteúdos matemáticos. A visão do professor sobre os alunos da Universidade é necessária para que os saberes dos licenciandos possam ser mapeados, especialmente no que diz respeito ao conceito de função.

Pela entrevista dos alunos, conhecem-se por meio da experiências escolares e profissionais, seus objetivos no curso de matemática e objetivos na profissão. O

acompanhamento da história de vida escolar é necessário para que os alunos possam ser caracterizados, diante das preferências e dificuldades da trajetória. Como objetivo principal, compreender como aprendeu-se o conceito de função, as dificuldades enfrentadas no processo e os elementos formadores dos subsunçores, é o ponto-chave desse momento da pesquisa.

5.3.1. A Entrevista com o Professor de Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral I

A entrevista com o professor de Cálculo I não foi difícil: marcados data e horário é feita sem qualquer adiamento. Com a utilização da câmera, é mais fácil a transcrição do material da entrevista. Realizada em 20/06/07, às 15h 15 min, nas instalações da UECE, a entrevista dura pouco mais de 23 minutos, em que o professor discorre sobre seus dados profissionais, sobre a disciplina de cálculo, bem como sobre os saberes dos licenciandos (Apêndice IV).

O professor afirma que a disciplina é de pré-cálculo, com estudo de conjuntos numéricos até funções, com a inclusão da Geometria Analítica, e em seguida, Cálculo Diferencial e Integral. No que diz respeito ao conteúdo de função, os alunos trabalham com o conceito de lei de definição e construção de gráficos, especialmente quando estudadas as derivadas.

O professor caracteriza os alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UECE como despreparados, com grandes dificuldades em relação aos conteúdos matemáticos. São, por outro lado, de fácil relacionamento e, reconhecendo não saber matemática, querem aprender. No geral, as dificuldades são causadas pela grande defasagem dos conteúdos do Ensino Médio, o que justifica a ampliação do curso de Cálculo I para 10 créditos. A falta do hábito de escrever e argumentar, de resolver questões sem se interessar pelo seu desenvolvimento e problemas sem apresentar justificativa são as dificuldades básicas dos alunos "novatos".

A dificuldade com as simbologias matemáticas é muito forte, mas a organização do raciocínio e a utilização da linguagem também são dificuldades a serem superadas. Quanto à função, o professor afirma que a grande dificuldade dos alunos está em formalizar o conceito, além de calcular, em alguma situação específica, o valor pontual, de compreender a regra da função como caminho a ser seguido. Compreender função sob o ponto de vista teórico e prático, diferenciar variável e incógnita, confundir o

conceito de função com o de equação, trabalhar com funções com mais de uma variável, compreender e diferenciar o que são variáveis dependentes e independentes são dificuldades subjacentes, de acordo com o profissional, cuja experiência como professor já ultrapassa os 30 anos de carreira e os 20 anos de UECE.

As dificuldades relatadas pelo professor entrevistado, sobre os conteúdos matemáticos dos alunos recém-ingressos na Universidade não surpreendem. Os autores citados no Capítulo 3 apresentam, em suas pesquisas, dificuldades semelhantes no trabalho com funções. Se os problemas existem, precisam ser investigados enfatizando os conceitos de função, variável, incógnita, equação, expressão algébrica, variável dependente e independente por meio de processos investigativos diante de levantamentos de informações e de intervenções.

5.3.2. A entrevista com o aluno GATO[5]

A entrevista é feita em 02/07/07, por volta das 14h 30min., nas instalações da UECE, durante 34 minutos, em que o aluno discorre sobre dados pessoais, sua história de vida escolar, como conheceu o conceito de função e como o compreende atualmente. (Apêndice IV).

Nascido em Fortaleza/CE, em 1989, sua vida escolar inicia aos 3 anos de idade, em Aquiraz, até a alfabetização, em colégio particular. Da antiga 1ª série até a 5ª série, em colégio público, o mesmo de sua formação infantil. De volta ao colégio particular, estuda com bolsa, da 5ª até a 8ª série. No Ensino Médio, estuda em instituição pública, no CEFETCE.

A maior dificuldade, em relação aos conteúdos matemáticos, é na 5ª série. As frações e as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão lhe trazem grande confusão. Somente no final da 6ª série, transpõe as dificuldades. Acredita que isso é por seu professor não estar preparado para o ensino de Matemática. Formado em Agronomia, no ano seguinte deixa de ensinar Matemática para ensinar Biologia, com cujo conteúdo se identifica mais.

Em relação a outros conteúdos, sempre apresenta dificuldades na compreensão de História, para o que teve que se esforçar. Fazer resumos, muitas atividades, é rotina

[5] Pseudônimo atribuído pela pesquisadora pelo fato do aluno ter se apegado aos gatinhos que passaram a freqüentar os encontros marcados na sala G1 da UECE, Campos do Itaperi.

de estudo. Inglês torna-se difícil, mas, com o curso extra, fora da escola, compreende melhor.

No Ensino Médio, a maior dificuldade é Física, por não haver aprendido os conceitos de maneira mais aprofundada na 8ª série. Os conteúdos de Química são igualmente difíceis, mas com o tempo, consegue compreender melhor que os de Física. Mesmo assim afirma que Química é a disciplina favorita, seguida de Matemática, Biologia e Filosofia. Conclui o Ensino Médio, no CEFETCE aos 19 anos de idade, em 2005, e, ao prestar vestibular pela primeira vez, ingressa na UFC cursando Bacharelado em Matemática no período diurno.

Como não se identifica com o curso, ao término do 2º semestre letivo, presta vestibular novamente para o curso de Licenciatura em Matemática na UECE. No ano de 2007 estuda nas duas Universidades. Não tem experiência como professor de matemática. Diz apenas ter contato com o ensino ao ministrar aulas particulares há sete anos, na própria casa, com a participação de poucos alunos. Gosta de ensinar matemática. A matemática pura e simples não o atrai. Por outro lado, ensinar outros conteúdos também não. Seu objetivo é seguir a carreira vinculada ao ensino da matemática para aprender a repassar conhecimentos matemáticos.

Pretende concluir o curso de Licenciatura em Matemática da UECE e prosseguir a pós-graduação, no curso de especialização na área e, em seguida, no Mestrado. Relata ainda que, nesse período, gostaria de estar atuando em sala de aula. Se pudesse escolher, gostaria de ensinar na cidade onde mora, Aquiraz, no colégio público que freqüentou no Ensino Fundamental I.

Seu primeiro contato com o conceito de função acontece na 7ª série, conhecimento utilizado nos anos subseqüentes, inclusive na Faculdade. O professor ensina o conceito de função utilizando a Teoria dos Conjuntos e a correspondência dos elementos de um conjunto em outro, por meio do Diagrama de Venn e as setas de conexão de cada par de elementos.

Suas maiores dificuldades no conceito se relacionam ao fato de os elementos de domínio de função apresentarem uma única correspondência com os elementos do conjunto contradomínio e os elementos do contradomínio apresentarem a possibilidade de ter mais de uma correspondência com o conjunto domínio. Além disso, diferenciar imagem de contradomínio é de difícil compreensão. Ele afirma que se confunde em relação aos conceitos.

Os elementos que caracterizam função, em sua opinião, são: a lei de correspondência entre dois conjuntos, o domínio e o contradomínio. Os conceitos de variável, de incógnita, de relação e de equação também se relacionam ao conceito de função, mas acredita não existir diferença entre incógnita e variável, são conceitos idênticos. Para representar função, prefere utilizar gráfico. Além de melhor visualizar a função e seu comportamento, ele acredita que o domínio e o contradomínio ficam explícitos.

Apresenta a primeira definição de função da seguinte forma: "*considerando dois conjuntos A e B, chama-se função a relação que existe entre o conjunto A com o conjunto B, uma certa lei de formação, a lei da função, (...) um elemento no conjunto A pode ter uma única imagem no conjunto B*". Ao fim, parece estar esquecendo alguma coisa, mas prefere não complementar.

Os elementos subsunçores do aluno sobre o conceito de função se relacionam basicamente com a visão de função associada aos conjuntos, isto é, elementos como lei de formação, domínio, contradomínio e imagem fazem parte de conhecimentos adquiridos. Vale ressaltar que, para esse aluno, função é a relação entre dois conjuntos em que a lei de formação é fator preponderante, bem como o fato de a imagem ser única para cada elemento do domínio.

5.3.3. A entrevista com o aluno PEIXE[6]

A entrevista é realizada em 03/07/07, às 17h, nas instalações da UECE, durante 20 minutos em que o aluno discorre sobre dados pessoais, sua história de vida escolar, como conheceu o conceito de função e como o compreende atualmente (Apêndice IV).

Nascido em Fortaleza/CE, em 1988, sua vida escolar iniciou pela alfabetização. A educação básica até o Ensino Médio é sempre no mesmo colégio particular, por escolha dos pais e pelo fato de ser próximo ao local de morada.

As dificuldades em relação aos conteúdos matemáticos são os estudos de tabuada de multiplicação, no Ensino Fundamental I, e no Ensino Médio, o conteúdo de Probabilidade. Assuntos de Geometria Espacial ou Plana, afirma não gostar de estudar, mas com dedicação consegue compreendê-los. Em relação a outros conteúdos, não gosta de História, Língua Inglesa e Portuguesa, por não apresentarem conteúdos exatos, o que se perpetua até hoje. As disciplinas favoritas são Matemática e Física. Sua

[6] Pseudônimo escolhido pelo próprio aluno.

exatidão o atrai e, mesmo que precise ler e interpretar problemas, considera que o pensamento é diferente do utilizado para pensar sobre conteúdos lingüísticos.

Conclui o Ensino Médio no Colégio Dom Quintino, aos 17 anos de idade, em 2005, e, ao prestar vestibular, ingressa na UECE, cursando Licenciatura em Matemática no período diurno. Tenta o curso de Engenharia Mecânica na UFC e o curso de Mecatrônica no CEFETCE, sem êxito. Não apresenta experiência como professor de matemática. Diz apenas ter contato com o ensino, ao ministrar aulas particulares para os amigos, de Matemática e Física. Gosta de estudar conteúdos exatos, sem dupla interpretação. Pretende seguir a carreira de docente e seu objetivo com o curso de Licenciatura é se tornar professor.

Seu primeiro contato com o conceito de função é na 8ª série, utilizando esse conhecimento nos anos subseqüentes. Seu professor apresenta o conceito de função utilizando a Teoria dos Conjuntos e a correspondência dos elementos de um conjunto em outro por meio do Diagrama de Venn e as setas de conexão de cada par de elementos.

Sua maior dificuldade é com a interpretação gráfica. Diz ter aprendido a reconhecer e a compreender gráficos praticamente sozinho pelo método de acertos e erros. Os conceitos sobre vértice, ponto máximo, ponto mínimo, por exemplo, não foram ensinados na escola. Para o aluno, não existem elementos específicos de função. O que normalmente se faz, ao trabalhar esse conceito, é "*calcular alguma coisa a partir de outra*". O conceito de variável, de incógnita, de relação e de equação também se relacionam ao conceito de função, mas acredita que o conceito de variável e incógnita são iguais. Para representar uma função, prefere utilizar expressão algébrica. Por meio dessa representação, ele é capaz de verificar o grau da função, número de raízes e o tipo do gráfico.

Sua primeira definição de função é: "*uma função matemática é uma expressão algébrica que me permite calcular alguma coisa a partir de outra*". Não quis acrescentar outras informações.

Os elementos subsunçores do aluno, sobre o conceito de função, se relacionam basicamente com a visão da função associada aos conjuntos. Não explicita os elementos de uma função, tais como domínio, contradomínio e lei de formação. O conceito se pauta no conceito de cálculo e de relação entre duas "coisas" levando a compreender, de forma interpretativa, que seja uma relação entre conjuntos.

O aluno GATO e o aluno PEIXE apresentam origens diferentes, com trajetórias de vida também diferentes, que, em alguns momentos, apresentam características semelhantes, por exemplo, estão juntos não só no curso de Licenciatura em Matemática da UECE, como também nesta pesquisa. Gostam de matemática, pretendem ser professores da área, estudaram função pela Teoria dos Conjuntos, consideram que variável e incógnita são conceitos idênticos, acreditam que equação, relação, variável e incógnita são elementos relacionados ao conceito de função, e reconhecem ter dificuldades em alguns aspectos desse conhecimento.

Enquanto o aluno GATO tem conceitos explícitos de função, como domínio, contradomínio e lei de formação, o aluno PEIXE os tem de forma implícita, externalizando somente a relação capaz de transformar um elemento de um conjunto em elemento de outro conjunto. Constata-se assim que os elementos formadores dos subsunçores de ambos são diferentes, embora tenham aprendido função pelo conhecimento de conjuntos. Para as análises subseqüentes, serão consideradas as estruturas cognitivas individuais, apesar de o trabalho ter sido realizado em conjunto.

5.4. Os Questionários

Os questionários têm o objetivo de saber mais profundamente os conhecimentos prévios dos alunos, em relação aos conceitos básicos de função diante da visão teórica e aplicada da matemática. Essa fase da pesquisa é realizada em dois dias, o primeiro para o desenvolvimento do questionário teórico, e o segundo, para o questionário aplicado. Nesse ínterim, os alunos ficam livres para pesquisar o tema e se aprofundar em questões que lhes suscitem dúvidas.

O Questionário Teórico é realizado em 09/07/07, às 15h, na sala G1 do Campus do Itaperi. As perguntas teóricas buscam compreender o que os alunos pensam sobre os conceitos de:

- função, domínio, contradomínio, imagem e lei de correspondência;
- expressão algébrica e possível relação com o conceito de função;
- equação e possível relação com o conceito de função;
- variável e incógnita e suas relações com o conceito de função;
- variável dependente e variável independente.

O Questionário Aplicado é realizado em 10/07/07, às 15h, na sala G1 do Campus do Itaperi. As perguntas apresentam situações matemáticas aplicadas, subdividindo-se em duas partes:

- aplicação com conjuntos;
- aplicação com álgebra.

Na primeira parte, o objetivo é verificar como o aluno reconhece uma função a partir da leitura dos Diagramas de Venn; caracteriza os conjuntos domínio, contradomínio e imagem de uma função; reconhece sua lei de correspondência e suas variáveis; caracteriza a variável dependente e a variável independente.

Na segunda parte o objetivo é verificar como o aluno reconhece uma função a partir da leitura de uma situação algébrica; reconhece os elementos formadores dessa função; reconhece uma equação e uma expressão algébrica; e caracteriza o domínio, o contradomínio e a imagem da função.

5.4.1. O Questionário Teórico do aluno GATO

O aluno responde o questionário em 33 minutos (Apêndice V). Ao definir função, afirma que "*Função é uma relação que ocorre geralmente entre dois conjuntos que utiliza uma característica para relacionar os elementos desses conjuntos*". Exemplifica a definição da seguinte maneira: "*a quantidade de dinheiro que gasto em relação à quantidade de livros que compro*".

O aluno ressalta o conceito de função, no questionário teórico, como relação entre dois conjuntos, da mesma forma que na entrevista. Acrescenta novo elemento, a palavra "característica". Supõe-se, relacionado ao conceito de lei de formação da função expressa na entrevista. É interessante ressaltar que, no exemplo, o aluno não explicita os conjuntos, nem a lei de formação de relação, afirmando apenas a existência da relação. Pode-se concluir, a princípio, que o conceito de relação esteja relacionado ao conceito de função.

O domínio e o contradomínio e a imagem são definidos como conjuntos formadores de uma função. O domínio é formado pelos elementos que iniciam a relação; o contradomínio, pelos elementos que podem se relacionar com os elementos do domínio; e, a imagem, pelos elementos do contradomínio que apresentam um correspondente no domínio.

A lei de formação é definida como "*característica utilizada para corresponder um elemento do domínio com o contradomínio*". Acrescenta ainda que a lei de formação também pode ser uma equação e apresenta como exemplo "*y = 2x + 5*". Pode-se concluir que a palavra "característica" se relaciona ao conceito de lei de formação da função. E, como está relacionado ao conceito de equação existe a possibilidade de que o conceito de equação esteja vinculado ao conceito de função por meio do conceito de lei de formação.

Define equação como "*uma expressão algébrica que contém uma igualdade*". E, como exemplo, coloca que "*3x + 1 = 5*" representa uma equação. O aluno não utiliza o termo função para definir equação, o que pode significar que o conceito de equação, em sua compreensão, não seja igual ao conceito de função. Ainda assim acredita que uma equação pode representar uma função já que é possível estabelecer "*uma correspondência entre os elementos do domínio e do contradomínio*" por meio de uma equação.

Define expressão algébrica como "*uma expressão que pode relacionar números e variáveis*" e utiliza "2a + 3b + c" como exemplo. O aluno não utiliza o conceito de função para definir expressão algébrica. Isso pode significar que o conceito de expressão algébrica não seja igual ao conceito de função. Na realidade, o aluno afirma que a expressão algébrica não pode representar uma função porque "*não há como corresponder dois elementos de conjuntos distintos (no caso domínio e contradomínio)*". Conclui-se que o conceito de expressão algébrica não está relacionado ao conceito de função.

Ao definir incógnita, escreve que "*é uma letra que representa um valor desconhecido*". Ao definir variável, coloca que "*é o mesmo que incógnita*". Em nenhuma das definições, os conceitos de equação e função estão presentes. Porém afirma que uma incógnita (ou variável) pode ser utilizada numa equação, já que ela pode ser representada por valores conhecidos ou não. Isso pode significar que os conceitos de equação estão relacionados aos conceitos de incógnita e variável. O aluno afirma que uma incógnita (ou variável) pode representar uma função, porque normalmente ela é representada por uma equação. Conclui-se que os conceitos de incógnita e variável também se relacionam ao conceito de função.

Variáveis dependentes "*são aquelas que dependem do valor de outra variável*" e variáveis independentes "*não dependem de uma outra variável*". Como exemplo coloca que "*y = 2x*" é uma relação onde y representa uma variável dependente, e x uma

variável independente. Ainda assim não utiliza os conceitos de função e de equação nessas definições. E, apesar do conceito de variável estar relacionado ao conceito de função e de equação, nada se pode afirmar da relação entre variável dependente e independente e o conceito de função.

5.4.2. O Questionário Teórico do aluno PEIXE

O aluno realiza o questionário em outra data, 10/07/07, às 15h43min, em 45 minutos (Apêndice V). Ao conceituar função, afirma que "*Função matemática é uma relação entre dois números, onde um dos números é obtido a partir do outro*". E, como exemplo, coloca que uma função pode ser "*f(x) = 2x + 1*". O que na entrevista era concebido como expressão algébrica, agora é citado como relação entre dois números. É interessante ressaltar que, no exemplo, o aluno representa função algebricamente. Conclui-se que o conceito de função está relacionado ao fato de um número ser obtido a partir de outro, por meio de uma igualdade que os relacione. O conceito de relação pode estar vinculado ao conceito de função, em sua estrutura cognitiva.

O domínio, o contradomínio e a imagem não são definidos como conjuntos formadores do conceito de função, mas pelo que eles representam na função. O domínio "*representa os valores que o número x pode assumir*", o contradomínio "*representa os valores que o número f(x) pode assumir*", e, a imagem "*representa os valores que f(x) assume para um determinado valor de x*".Utiliza-se em várias situações, a representação algébrica. Até mesmo os elementos dos conjuntos apresentam a representatividade algébrica. E, apesar do domínio, contradomínio e imagem não estarem explícitos, na definição sobre função, o aluno os reconhece como elementos integrantes do conceito.

A lei de formação é definida como "*relação entre o seu domínio e o seu contradomínio*". Como exemplo, coloca que "*f: R -> N*" representa uma lei de formação. Não considera a lei de formação como sendo uma equação. E, apesar de ter exemplificado uma função utilizando os elementos da equação, considera que a lei está relacionada à representação da relação entre o domínio e o contradomínio.

O aluno considera a equação como "*uma igualdade entre dois números*". Exemplifica o conceito da seguinte maneira: "*4x + 8 = 0*". Não utiliza, no conceito de equação, o conceito de função, mas concorda com a possibilidade de a equação representar uma função, pois uma "*função representa uma igualdade*". É possível que o conceito de equação esteja relacionado ao conceito de função, mas não necessariamente

relacionado ao conceito de lei de formação. Ainda assim, é possível considerar que o conceito de equação seja diferente do conceito de função em sua estrutura cognitiva.

Define expressão algébrica como "*uma expressão que representa um único número*". Exemplifica a expressão algébrica da seguinte maneira: "*4x + 3*". Não utiliza o conceito de função para definir expressão algébrica. Isso pode significar que o conceito de expressão algébrica não esteja relacionado ao conceito de função. O aluno afirma que a expressão algébrica realmente não pode representar uma função porque "*uma função representa uma relação entre dois números e uma expressão algébrica representa apenas um número*". Conclui-se que o conceito de expressão algébrica não está relacionado ao conceito de função.

Ao definir incógnita, escreve que "*é um número que é representado por uma letra e que representa a relação de uma equação*". Ao definir variável, coloca que "*é um número que pode variar de acordo com o resultado que se queira chegar*". É possível que o conceito de incógnita esteja relacionado ao de equação, o que não necessariamente acontece com o conceito de variável. Esse fato se comprova, ao afirmar que uma incógnita pode ser utilizada na equação porque "*é justamente o que dá sentido a uma equação*". Porém, no que diz respeito à variável, o aluno considera que ela não pode ser utilizada numa equação porque o valor da incógnita representa a solução da equação e a solução não vai variar.

Se a incógnita está na equação e a equação representa uma função, por transitividade lógica, a incógnita também pode estar na função. Dessa forma, o aluno afirma que "*a incógnita pode ser representada pela letra x de uma função e pode também representar sua solução*". Acredita-se que, ao falar sobre solução, ele esteja se referindo à solução da equação. Apesar de considerar que a variável não está presente na equação, considera que ela é um elemento formador de função afirmando que, "*embora existam funções sem variáveis (funções constantes), a variável é que compõe a função*". Conclui-se que incógnita e variável são dois conceitos relacionados ao conceito de função.

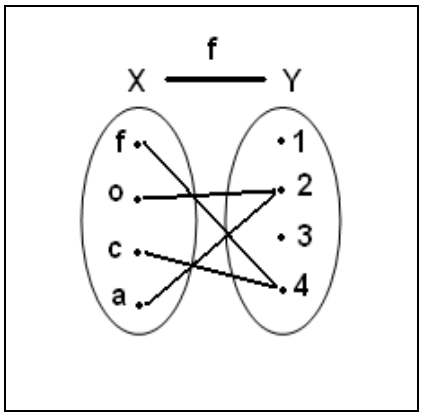
O aluno não consegue reconhecer a variável dependente, nem uma variável independente. Dessa forma, não consegue estabelecer relação entre elas, nem apresentar exemplos para identificá-las ou relacioná-las ao conceito de função.

5.4.3. O Questionário Aplicado do aluno GATO

O aluno realiza o questionário em outra data, em 11/07/07, às 15h25min, em outro local, também no Campus do Itaperi, em 17 minutos, um tempo menor do que o questionário anterior (Apêndice V).

Na 1ª parte do Questionário Aplicado, o aluno escolhe a representação A (figura 8) para caracterizar uma função, justificando que a situação obedece à "*lei da função*".

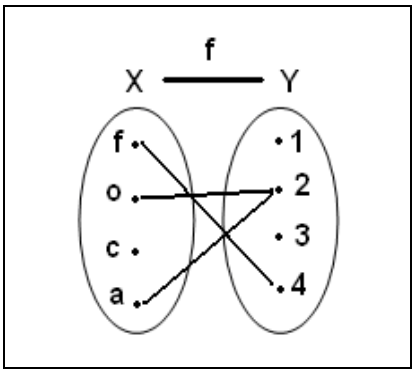
Figura 8 – Situação A do Questionário Aplicado – Parte 1



Fonte: Elaboração própria

Rejeita a situação B (figura 9) porque "*um dos elementos de x que é consoante não está ligado a um elemento em y*" e a situação C (figura 10) porque "*o elemento c possui duas imagens*".

Figura 9 – Situação B do Questionário Aplicado – Parte 1

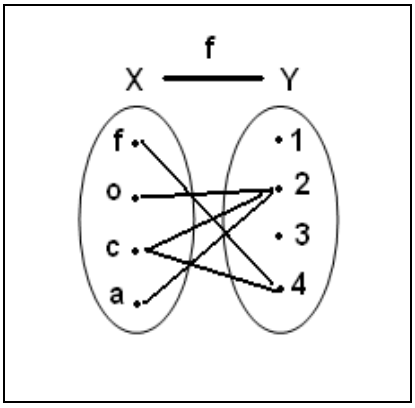


Fonte: Elaboração própria

O aluno considera a definição do domínio, do contradomínio e da lei de formação suficiente, para uma relação se definir como função. É necessário que os elementos do domínio apresentem um único correspondente no contradomínio. Existem condições a serem consideradas. Reconhece o domínio como um conjunto formado

pelos elementos do conjunto X, o contradomínio como um conjunto formado pelos elementos do conjunto Y e a imagem como os elementos do contradomínio que apresentam uma correspondência no domínio, enfatizando o que definiu no Questionário Teórico.

Figura 10 – Situação C do Questionário Aplicado – Parte 1



Fonte: Elaboração própria

Os elementos do domínio e do contradomínio são caracterizados como variáveis, sendo que a variável independente pertence ao primeiro conjunto e a variável dependente, ao segundo conjunto citado. O aluno reconhece que as variáveis estão na função e que, devido à relação entre elas, uma pode se caracterizar como dependente e outra como independente, inclusive no que diz respeito aos conjuntos.

Na 2ª parte do Questionário Aplicado, a função v: R → R pode ser caracterizada por "*x + y = 10*", pois essa representação mostra a relação existente entre x e y numa equação. Descarta-se a opção "*x + y*" porque "*não é uma equação*" e a opção "*x + 1 = 10*" porque "*não há como relacionar x com y*". Nessa situação, as condições para ser função não citadas pelo aluno. Para ser função é necessário que se tenha uma equação representada por duas letras que possam se relacionar entre si. Com duas letras, não sendo equação, ou se for equação e não tiver duas letras, não é possível se construir uma função.

Para o aluno, x e y representam incógnitas e variáveis, sendo que x é considerada variável dependente e y, variável independente. Os resultados ratificam os apresentados no Questionário Teórico sobre o fato das variáveis se relacionarem ao conceito de função.

Interrogado sobre qual situação representa equação, escolhe a opção "*x + 1 = 10*", não fazendo qualquer menção à situação "*x + y = 10*" que considera representar uma função por ser equação. O fato pode denotar que o aluno, ao compreender uma situação como função, deixa de compreendê-la como equação, mesmo que considere a relação entre os conceitos de equação e função.

Caracteriza expressão algébrica como "*x + y*". Percebe-se que, apesar de a função e a expressão algébrica serem formadas por incógnitas e variáveis, elas representam conceitos diferentes e não estão, aparentemente, relacionadas entre si. Reconhece o domínio, o contradomínio e a imagem como sendo o conjunto R dos números reais. Mesmo diante de representação algébrica, o aluno reconhece os conjuntos como elementos básicos de uma função.

5.4.4. O Questionário Aplicado do aluno PEIXE

O aluno realiza o questionário em outra data, 11/07/07, às 15h25min, em outro local, também no Campus do Itaperi, com o aluno GATO, em 33 minutos, tempo semelhante ao levado para o questionário anterior (Apêndice V).

Na 1ª parte do Questionário Aplicado, o aluno escolhe a representação A (figura 8) para caracterizar uma função, justificando que a situação obedece a "*todas as leis da função*". Rejeita a situação B (figura 9) porque "*o elemento ´c´ deveria estar ligado a um número par não primo, mas não está*" e a situação C (figura 10) porque "*o elemento ´c´ não deveria estar ligado ao elemento 2*".

Reconhece o domínio como conjunto formado pelos elementos do conjunto X, o contradomínio como o conjunto formado pelos elementos do conjunto Y e a imagem como os elementos do contradomínio que apresentam correspondência no domínio, enfatizando o que havia definido no Questionário Teórico.

Define como variável apenas os elementos pertencentes ao domínio e justifica afirmando que "*são os elementos do domínio que variam para definir a sua imagem*". E, apesar de não saber definir variáveis dependentes e independentes, conforme os resultados do Questionário Teórico, o aluno considera que a variável k se comporta como variável independente e não existe variável dependente.

Na 2ª parte do Questionário Aplicado, a função v: R $\rightarrow$ R pode ser caracterizada por "*x + y*", pois a situação "*é a única que não representa uma equação*", descartada a

opção "*x + 1 = 10*" porque "*considera ser uma equação*" e a opção "*x + y = 10*" pelo mesmo motivo.

Para ser função, é necessário que se tenha uma expressão algébrica representada por duas letras que não caracterizem uma equação. É importante ressaltar que, na Entrevista e no Questionário Teórico, o aluno afirma que uma equação pode representar uma função. Já, no Questionário Aplicado, o aluno afirma justamente o contrário. Até que ponto o conceito de equação pode estar relacionado ao conceito de função?

Nessa situação, x e y representam variáveis, e, em ambos os casos, variáveis independentes. Para ele não existem variáveis dependentes. Na 1ª parte do questionário e na 2ª, o aluno consegue reconhecer apenas variáveis independentes. O fato de não saber definir o conceito de variável dependente e independente pode influenciar na compreensão desses conceitos também em situações aplicadas.

Interrogado sobre qual situação representa equação, escolhe a opção "*x + 1 = 10*" e a situação "*x + y = 10*". Justifica sua escolha afirmando que essas situações "*não representam função e nem simples expressões algébricas*". O resultado ratifica o fato de uma equação não poder representar uma função. Contradiz, porém, o apresentado no Questionário Teórico.

Ao caracterizar a expressão algébrica, reconhece-a como "*x + y*", justificando que a situação "*não apresenta sinal de igualdade*". Ao caracterizar a função, o aluno também utiliza a mesma representação algébrica utilizando praticamente a mesma justificativa. Pode-se concluir que o conceito de expressão algébrica está relacionado ao de função. O fato contradiz o apresentado no Questionário Teórico, a respeito do conceito de expressão algébrica. Nessa situação, o aluno afirmou que a expressão algébrica não representa uma função porque toda função representa uma relação entre dois números, o que a expressão algébrica não é capaz de fazer. Conclui-se que o conceito de expressão algébrica pode estar ou não relacionado ao de função. Ainda suscita dúvidas.

Reconhece o domínio, o contradomínio como sendo o conjunto R dos números reais. Porém não faz qualquer menção ao conjunto imagem. É importante ressaltar que, mesmo com a representação algébrica, o aluno é capaz de reconhecer conjuntos como elementos básicos de uma função.

Para o aluno GATO, o conceito de função aparece, em diferentes situações, vinculado ao de relação entre conjuntos, em que a lei de formação é o aspecto mais relevante. Reconhece também a função pela relação entre variáveis. Para o aluno

PEIXE, o conceito aparece mais diversificado, vinculado à relação entre dois números, e à relação entre conjuntos e entre variáveis, em que o conceito de lei de formação aparece de forma implícita.

. Os conjuntos domínio, contradomínio e imagem são, para ambos, conceitos relacionados ao conceito de função. As condições de existência e de unicidade de uma função são apresentadas pelos alunos em situações que requeiram pensamento voltado para conjuntos. O aluno GATO explicita as duas condições, já o aluno PEIXE explicita apenas a condição de existência. Os conceitos de equação e de expressão algébrica diferenciam a formação da estrutura cognitiva de cada um. Para o aluno GATO, o conceito de equação está relacionado ao conceito de função. Para o aluno PEIXE, a relação acontece no aspecto teórico, não se revelando em situações aplicadas.

É compreensível que o conceito de expressão algébrica, para o aluno GATO, não está relacionado ao de função. Porém, para o aluno PEIXE, a relação ainda suscita dúvidas. Teoricamente, o aluno considera não haver relação, porém, em situações aplicadas da matemática, a vinculação ocorre enfaticamente.

Os conceitos de variável e de incógnita são idênticos, a princípio, para ambos. Porém, num segundo momento, o aluno PEIXE modifica sua opinião e afirma que, na função, existem apenas variáveis, o que pode denotar que variável e incógnita apresentam, para o aluno, conceitos diferentes. O aluno GATO, por sua vez, mantém sua opinião em todos os questionamentos.

Em relação às variáveis dependentes e independentes, o aluno GATO consegue se manter fiel a sua definição teórica vinculando o conceito de variável dependente ao domínio, e o conceito de variável independente do conceito de contradomínio. O aluno PEIXE, porém, não definindo teoricamente os conceitos, faz menção apenas às variáveis independentes, no plano das aplicações, afirmando que não existem variáveis dependentes no que reconhece como função.

Ao refletir sobre o conceito de função, é perceptível que os alunos tragam em sua estrutura cognitiva, conceitos semelhantes, bem como conceitos singulares que dizem respeito a cada um especificamente. O aspecto específico pode contribuir para que a aprendizagem significativa do conceito de função, na fase da intervenção, ocorra diferentemente para ambos. O processo pode tomar rumos distintos, embora a intervenção seja única e direcionada para todos os alunos.

6. A ETAPA DAS INTERVENÇÕES

A etapa das Intervenções é inspirada nos Princípios Programáticos da Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, subdividindo-se, em três fases (figura 7):

- Fase 1 – Assimilação do conceito de função – Diferenciação Progressiva e Reconciliação Integradora;
- Fase 2 – Organização do conceito de função – Mapas Conceituais;
- Fase 3 – Aplicação do conceito de função – Consolidação.

O objetivo dessa etapa da pesquisa é descrever como os alunos se estruturam mentalmente para ressignificar o conceito de função, diante de situações e questionamentos que estimulem o pensamento para justificar as afirmativas e compreensão de possíveis contradições. Assim, cada fase apresenta um objetivo específico a ser alcançado no processo.

As atividades da fase 1 se subdividem em três períodos (figura 7):

- Período 1 – Conceitos Preliminares;
- Período 2 – Conceito de Função – Dirichlet;
- Período 3 – Conceito de Função – Elon Lages Lima e Geraldo Ávila.

Nessa fase, o primeiro objetivo é trabalhar com o refinamento do significado dos conceitos básicos de sustentação ao conceito de função, como conceito de expressão algébrica, variável, equação, incógnita, variável dependente e variável independente. E, num segundo momento, discutir novos conceitos relacionados ao conceito de função, aos conceitos de Dirichlet, do século XIX, e de Elon Lages Lima e Geraldo Ávila, do século XX.

Os dados são coletados em quatro fontes: dados teóricos em dicionários da língua portuguesa, tais como, Larousse (1992) e Ferreira (2004), dicionários específicos da matemática, Imenes e Lellis (1998), Soares (2005) e Sodré (2007), dados teóricos de obras de autores matemáticos, dados escritos de alunos nos protocolos e os dados

verbalizados pelos alunos por meio da gravação das discussões e posteriores transcrições.

Cada encontro se subdivide em quatro momentos. No 1º, mais especificamente, são realizadas discussões teóricas sobre cada conceito específico, pelo estudo da formalização de significados, seguida de formulação de palavras na qual os alunos destacam o significado central de cada conceito e realizam posterior reformulação conceitual. No 2º, as discussões tratam do aspecto aplicado da matemática. Problemas de estruturação simples são apresentados para que os alunos possam discutir os conceitos de forma hierárquica, respeitando o aspecto da Diferenciação Progressiva, seguida de preenchimento do protocolo com quadro-resumo. No 3º, os alunos utilizam o protocolo para elaborar conceitos discutidos com suas próprias palavras. E, no 4º, é desenvolvido trabalho voltado para a Reconciliação Integradora, no qual os alunos pensam sobre os conceitos a partir de problema matemático estruturado, no sentido inverso do apresentado no 2º momento do encontro.

Na fase 2, o primeiro objetivo é apresentar o conceito de Mapa Conceitual, estrutura, forma de organização dos conceitos discutidos, bem como a importância e a aplicabilidade da ferramenta pedagógica. Posteriormente, o objetivo é compreender como os alunos se organizam mentalmente para dispor de forma gráfica, os conceitos estudados e relacioná-los entre si utilizando técnicas de construção de mapas conceituais.

O desenvolvimento das atividades ocorre, nessa fase, de forma diferenciada. Os alunos se reúnem em duplas compostas por dois alunos para construção de cada mapa conceitual, em trabalho colaborativo, com estímulo e discussão durante o processo. As duplas são determinadas pela pesquisadora. Os critérios de escolha se baseiam na afinidade entre os integrantes do grupo, como também na convicção de atuar como profissional docente em matemática. Os alunos GATO e PEIXE participam de grupos diferentes. Na Intervenção 14, portanto, os alunos representam os integrantes dos respectivos grupos nomeados: grupo GATO e grupo PEIXE.

Os conceitos utilizados para ressignificar o conceito de função são retirados especificamente da obra de Lages Lima (1998) e das tabelas-resumo utilizadas durante as intervenções de 1 a 12, da Fase 1 da pesquisa.

Os dados são coletados em protocolos das duplas, com a construção dos mapas conceituais e das transcrições realizadas em cada intervenção. Ao produzirem os mapas

conceituais, os alunos utilizam apenas lápis, caneta e papel. Para a reprodução dos resultados se utiliza o software CMapTools, com a finalidade de organizar os mapas conceituais produzidos, de forma a facilitar a interpretação do leitor. O software é desenvolvido especificamente para a construção de mapas conceituais com o auxílio do computador.

A fase 3 se subdivide em dois períodos (figura 7):

- Período 1 – Resolução de Problemas;
- Período 2 – Auto-avaliação;

O objetivo principal é descrever como os alunos se organizam mentalmente para utilização do conceito de função na resolução de problemas contextualizados de matemática de acordo com os preceitos dos PCNEMs (2000). O desenvolvimento das atividades dá-se nessa fase, de forma diferenciada das demais. Os alunos voltam a trabalhar individualmente, porém um voluntário escolhido pelo próprio grupo desenvolve o processo de resolução dos problemas na lousa. Coincidentemente, os alunos escolhidos são os alunos GATO e PEIXE.

Os problemas para representar situações de relacionamento da matemática com a vida cotidiana e os conhecimentos científicos são retirados e adaptados dos livros didáticos de Giovanni e Bonjorno (2000) e Dante (2003), apresentados pela leitura da pesquisadora. Cada intervenção se destina ao trabalho de um problema específico. A intervenção 18 relaciona o conceito de função ao conhecimento de Progressão Aritmética; a intervenção 19, aos conhecimentos de Matemática Financeira; a intervenção 20, aos conhecimentos da Física; e a intervenção 21, aos conhecimentos da Biologia.

Todos os dados coletados são apresentados de forma descritiva seguindo uma ordem cronológica dos acontecimentos para cada Intervenção. A análise é apresentada conjuntamente com a descrição dos dados de forma interpretativa, pela triangulação entre conhecimentos teóricos, verbais e escritos, bem como triangulação entre os momentos de cada intervenção: apresentação, aplicação e descrição dos conceitos. As interpretações apresentam também como base teórica o princípio da Assimilação preconizado por Ausubel. Os dados são interpretados em comparação entre os passos dessa teoria e as modificações conceituais dos alunos GATO e PEIXE.

Apresenta-se um resumo (quadro 1) de todas as intervenções desenvolvidas na pesquisa, evidenciando suas respectivas fases, períodos, conceitos abordados, data e tempo de execução.

Quadro 1 – Etapa da Intervenção

FASE	PERÍODO		NI[7]	CONCEITOS[8]	DATA	TEMPO[9]
ASSIMILAÇÃO	Conceitos Preliminares		1	EA e V	19/07	55
			2	EA, EN e V	24/07	55
			3	EA, EN, V e E	31/07	55
			4	EA, E, V e I	02/08	66
			5	EA, E, V e I	07/08	57
			6	VD, VI, E, V e I	09/08	63
			7	VD, VI, E, V e I	16/08	69
	Conceito de Função	Dirichlet	8	F, EA e E	21/08	67
			9	F e C	23/08	80
			10	F	28/08	65
		Lages Lima e Ávila	11	F e CN	30/08	72
			12	F	04/09	75
ORGANIZAÇÃO	Mapas Conceituais	Conceito	13	CN	11/09	74
		Construção	14	F	12/09	81
			15	F e CS	13/09	66
		Discussão	16	F e CS	18/09	68
			17	F e CS	20/09	72
AVALIAÇÃO	Resolução de Problemas		18	F e PA	25/09	60
			19	F e MF	27/09	72
			20	F e FI	02/10	68
			21	F e B	04/10	82
	Auto-Avaliação		22	F	09/10	60
Total					Minutos	1.482
					Semanas	11
Tempo médio					Min/Intervenção	67

Fonte: elaboração própria

[7] Número da Intervenção

[8] Significado das siglas:

EAExpressão Algébrica**I**Incógnita**C**Condições**V**Variável**VD**Variável Dependente**CN**Conjuntos**EM**Expressão Numérica**VI**Variável Indepente**CS**Conceitos Subjacentes**E**Equação**F**Função**PA**Progressão Aritmética**MF**Matemática Financeira**FI**Física**B**Biologia

[9] Tempo calculado em minutos.

Nos próximos subcapítulos são apresentadas as principais intervenções desenvolvidas para cada fase da pesquisa, aquelas que apresentam destaque na utilização da metodologia e na resposta fornecida pelos alunos, dentre elas:

- Intervenção 9 – O conceito de função e as condições de existência e unicidade;
- Intervenção 11 – Os conceitos modernos de função – Elon Lages Lima e Geraldo Ávila;
- Intervenção 14 – Os mapas conceituais sobre o conceito de função;
- Intervenção 18 – Problema 1 – Função e Progressão Aritmética;
- Intervenção 22 – A auto-avaliação e a ressignificação do conceito de função.

Vale acrescentar que, para a compreensão do processo de ressignificação do conceito de função por parte dos alunos analisados, é necessário que seja realizada a leitura de todas as intervenções. Dessa forma, o leitor que tiver interesse em conhecer maiores detalhes sobre a pesquisa poderá buscar a complementação da leitura no Apêndice ????. Nele consta a descrição de todas as outras intervenções, com exceção apenas das Intervenções 19 e 20, que, em termos de resultados obtidos, assemelham-se às Intervenções 18 e 21.

6.1. Intervenção 9 – O conceito de função e as condições de existência e unicidade

Este encontro acontece em 23/08/07 totalizando 80 minutos e, são abordados o conceito de função, de variável dependente, variável independente com ênfase nas condições de existência e unicidade do conceito de função. É apresentada aos alunos a definição formalizada de Dirichlet seguida de um quadro-resumo com as informações que os próprios alunos desenvolveram na intervenção 8.

Os objetivos desse encontro são refletir sobre a definição de função de Dirichlet a fim de possibilitar a compreensão da relação de dependência entre variáveis, bem como as condições a ela inerentes: para todo valor atribuído à variável independente, sempre existe um valor correspondente para a variável dependente e esse valor é único.

É importante ressaltar que para cada situação apresentada aos alunos, o conceito de função é refletido de forma direta e inversa para que possam compreender a situação de dependência e independência das variáveis sem o suporte direto da visualização

algébrica. Além disso, a representação tabular também é considerada para a compreensão do conceito.

Na 1ª parte deste encontro, os alunos optam por fazer a leitura das informações sem alterar nenhum dos dados fornecidos. Preferem passar para a discussão posterior relativa à parte aplicada da matemática. As atividades propostas procuram estimular o aluno a refletir sobre as relações específicas entre função e as condições de existência e unicidade, utilizando-se problemas matemáticos (quadro 2).

- **A variável preço em função da variável número de fotos**

Na representação P = 12,00 + 0,65n (quadro 2 – problema 1) em que P é considerada uma variável dependente e n uma variável independente, todos os alunos concordam que sempre vai existir um valor de P quando for atribuído um valor para n, e, ainda que esse valor é único. O aluno GATO acrescenta verbalmente que não existem dois valores de P para cada n.

Quadro 2 – Problemas da Intervenção 9

<table>
<tr><th>PROBLEMA</th><th>ENUNCIADO</th><th>REPRESENTAÇÃO</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Na revelação de um filme, uma óptica calcula o preço a ser cobrado usando a fórmula P = 12,00 + 0,65n, onde P é o preço, em reais, a ser cobrado e n o número de fotos reveladas do filme.</td><td>P = 12,00 + 0,65n</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Algumas tarifas praticadas pelo correio do país Alfa para o envio de carta não comercial e cartão postal se baseiam na relação expressa pela tabela abaixo:
<table>
<tr><th>“Peso” (gramas)</th><th>Custo básico (moeda local)</th></tr>
<tr><td>Até 20</td><td>0,30</td></tr>
<tr><td>Mais de 20 até 50</td><td>0,50</td></tr>
<tr><td>Mais de 50 até 100</td><td>0,80</td></tr>
<tr><td>Acima de 100</td><td>Peso/100</td></tr>
</table></td><td>dados da tabela</td></tr>
</table>

Fonte: Adaptado de Giovanni e Bonjorno (2000)

Os alunos, GATO e PEIXE, concordam que P está em função de n. O aluno GATO afirma verbalmente que esse fato acontece porque existe uma relação de

dependência, uma condição e também uma regra. O aluno PEIXE afirma que existe sim a relação de dependência, mas o fato de n ser natural também é relevante.

Os resultados apresentados no protocolo convergem para uma resposta também afirmativa, ou seja, a variável P está em função da variável n. As justificativas, porém, diferem. O aluno GATO se justifica dizendo que existe "*uma relação de dependência entre as variáveis e para cada valor de n o valor de P será único*". Não ressalta desta vez a existência da regra, nem explicita a condição de existência da função.

O aluno PEIXE justifica a existência da função afirmando que "*para cada valor atribuído a n existirá um único valor de P*". Não ressalta a relação de dependência entre as variáveis, e como seu colega, também não explicita a necessidade da regra, nem da condição de existência da função. É possível que a condição de unicidade da função esteja se tornando um elemento relevante para a ressignificação do conceito.

- **A variável número de fotos em função da variável preço**

Na representação P = 12,00 + 0,65n em que a situação das variáveis se altera, onde P é considerada uma variável independente e n, uma variável dependente, ocorre uma discussão entre os alunos. A primeira discussão acontece em torno da característica da variável n. A princípio o aluno GATO afirma que para qualquer valor atribuído à variável P sempre existirá um valor para a variável n. O aluno PEIXE, discordando do pensamento do colega, afirma que pelo fato de n representar o número de fotos não poder ser, por exemplo, 12,30. O aluno GATO refletindo sobre a afirmação do colega afirma que não é possível revelar fotos com 10 reais, mas com 20 reais é possível, porém sobram alguns centavos.

O aluno PEIXE discorda dessa afirmativa, para ele não é possível obter um correspondente para 20 reais porque o valor obtido para a variável n não é um número natural e o problema não pode ser satisfeito. Conclui afirmando que o número de fotos não pode ser zero, nem negativo, precisa ser um número natural. O aluno GATO concorda com a idéia do colega afirmando que n será natural se o valor pago pelas fotos for R$ 19,80. Ambos concluem que sempre que se atribuir um valor para P, o valor de n vai ser único, somente quando este valor existir, ou seja, a situação satisfaz a condição da unicidade, mas não satisfaz a da existência. Assim, n não está em função de P porque não satisfaz a uma das condições para ser função.

Esse mesmo resultado se faz presente nos protocolos. Ambos afirmam que sempre que for dado um valor numérico a P não existirá um valor para n. O contra-

exemplo apresentado pelo aluno GATO é "*P = 10 implica em n =* $\frac{-2}{0,65}$", ou seja, o valor de n é negativo. O contra-exemplo apresentado pelo aluno PEIXE é "*P = 20 implica em n = 12,30*" e não satisfaz o problema porque n é um número decimal.

Por outro lado, sempre que for dado um valor numérico a P, o valor de n sempre será único. O fato da relação não cumprir uma condição não interfere no fato dela obedecer à outra condição. Interfere, porém, na caracterização da função. Dessa forma, os alunos escrevem que, nesta situação, onde P é a variável independente e n a variável dependente, a relação P = 12,00 + 0,65n não representa uma função. É importante ressaltar que a modificação da situação da variável interfere na compreensão que os alunos têm sobre o problema.

Até então o fato do número de fotos ser um número natural não era relevante. Porém, diante da inversão da situação das variáveis, a discussão da natureza da variável emerge. Este é o primeiro momento que os alunos têm contato com uma situação que determinar o conjunto numérico com o qual se trabalha é realmente necessário, embora a definição de Dirichlet não faça menção a esse tipo de restrição.

- **A variável custo em função da variável peso**

Ainda na 2ª parte, propõe-se um novo problema para se discutir as características básicas do conceito de função (quadro 2 – problema 2). Nas discussões verbais realizadas, o aluno PEIXE afirma que o custo está em função do peso pois para cada valor do peso é possível encontrar um único valor do custo, o que, para ele, significa que existe uma relação de dependência entre as variáveis.

O aluno GATO coloca que ao se atribuir um valor ao peso existirá um valor para o custo e, a princípio considera que esse valor não é único. Em seguida reconhece que se confundiu e afirma que se tiver um peso de 1 grama até 20 gramas o custo é de 30 centavos, então para cada valor atribuído à variável independente existirá sim um único valor para a variável dependente. Conclui então que o custo está em função do peso e justifica afirmando que para cada valor do peso sempre existirá um valor único do custo.

As respostas obtidas com o protocolo ratificam o que é discutido. O aluno GATO e o aluno PEIXE afirmam que sempre que for dado um valor numérico ao peso sempre existirá um valor para o custo e esse valor será único. As justificativas apresentadas nos protocolos complementam aquelas apresentadas verbalmente. Para o

aluno GATO, além da condição de unicidade estar sendo obedecida, a existência de uma "regra" também é citada para justificar o fato dessa relação ser função. Para o aluno PEIXE, a existência da relação de dependência é uma característica preponderante, considerando também que a condição da unicidade também o é.

Uma discussão interessante que acontece nesse momento da intervenção se relaciona à representação algébrica do problema. Como os alunos podem escrever algebricamente a situação apresentada em forma de tabela? E, diante dessa caracterização, o que pode ser considerada uma equação?

Todos acreditam que a tabela em si representa a regra da função, embora não esteja escrita na forma algébrica. Assim, o aluno GATO, elabora seu pensamento explicitando-o verbalmente da seguinte forma: "$para\ x > 0\ e\ x < 20 \Rightarrow\ y = 0{,}30$". O aluno PEIXE solicita a troca da variável x por p, por se referir ao peso, e a variável y por c por se referir ao custo. Dessa forma, o aluno GATO continua explicitando a situação da seguinte maneira: "

$$\begin{array}{l} se\ x < 20\ e\ x \geq 50 \Rightarrow\ c = 0{,}50 \\ se\ x > 50\ e\ x \leq 100 \Rightarrow\ c = 0{,}80 \\ se\ x > 100 \Rightarrow\ c = \dfrac{x}{100} \end{array}$$

".

Afirma que todas essas expressões não são equações, mas um conjunto de condições que a função obedece dependendo do valor de x. A equação seria apenas $c = \dfrac{x}{100}$. O aluno PEIXE intervém afirmando que x = 9, por exemplo, representa a equação de uma reta paralela ao eixo y. Diante desse argumento, o aluno GATO afirma que c = 0,80 é uma equação de uma reta que passa em y = 0,80 e concorda que essas expressões representam um conjunto de equações que pode ser caracterizada como função.

Dessa vez, o aluno GATO menciona tanto a condição de existência quanto a condição da unicidade como situações a serem satisfeitas para que a relação estabelecida possa se caracterizar como função. Explicita também a necessidade da regra ser obedecida, fato que não mencionou no problema anterior. O aluno PEIXE atribui maior ênfase à condição de unicidade e, embora, não mencione a importância da regra, concentra-se no aspecto da relação de dependência entre as variáveis.

Apesar das discussões serem realizadas com todos os integrantes do grupo, cada um, escolhe seu caminho de compreensão conceitual, e, parece estar pautado nos seus conhecimentos prévios. Para o aluno que compreende função como uma relação entre dois números, a ênfase está na relação de dependência entre duas variáveis. Para o aluno que compreende função como uma relação de dependência entre variáveis, a ênfase está nas condições necessárias para ser função, sobretudo na condição de existência.

- **A variável peso em função da variável custo**

Ao tornar a variável c uma variável independente e a variável p, uma variável dependente, invertendo, portanto, a situação de cada uma delas no problema 2, os alunos chegam a conclusões diferentes.O menor custo possível do problema equivale a 30 centavos na moeda local. Se esse valor for utilizado, os alunos reconhecem que ficará difícil determinar o peso da carta porque poderia ser 1 grama, 2 gramas, 10 gramas, até 20 gramas, ou seja, à esse valor existem vários valores possíveis atribuídos à variável peso.

O aluno GATO diz ser possível encontrar um número, mas não um número exato. Ambos concordam que os valores para o peso existem, mas não são exclusivos para cada valor atribuído ao custo. Assim, consideram verbalmente que essa relação não é uma função.

Os resultados dos protocolos ratificam as conclusões verbais. O aluno GATO, assim como o aluno PEIXE, concorda que sempre que for dado um valor numérico ao custo sempre existirá um valor para o peso e acrescenta que "*sempre há uma condição para encontrar possíveis valores de peso*". Ambos também discordam do fato desse valor para o peso ser único. O contra-exemplo apresentado pelo aluno GATO diz que "*para c = 0,30 podemos ter p = 2 gramas ou p = 3 gramas, entre outros valores*". O contra-exemplo apresentado pelo aluno PEIXE revela que "*para c = 0,30, p = 1g ou p = 10g ou p = 15g*" é suficiente para dizer que o valor de p não será único.

O aluno GATO afirma que o peso não está em função do custo porque "*não satisfaz a condição de que o peso deve ser único quando se atribui um custo*". Para o aluno PEIXE o peso não está em função do custo porque "*para cada valor atribuído ao meu custo será encontrado mais de um valor para o ´peso´ da correspondência*".

- **Reflexões sobre os conceitos de regra e condição de uma função**

Na 3ª parte desta Intervenção são propostas aos alunos questões teóricas e verbais para as reflexões sobre os conceitos que ao longo das interações trouxeram dúvidas e indagações importantes. A primeira delas diz respeito às condições que uma relação deve obedecer para se tornar uma função.

O aluno GATO afirma que para existir uma função os valores atribuídos à variável dependente devem existir e serem únicos para todo x, ou seja, para todo valor atribuído à variável independente. O aluno PEIXE afirma que ao se definir uma função, define-se apenas uma única condição, o fato dos valores atribuídos à variável dependente serem únicos para cada valor atribuído à x pertencente ao domínio da função. Enquanto o primeiro aluno explicita duas condições, o segundo explicita apenas uma delas, utilizando inclusive nomenclaturas que ainda não foram discutidas, mas que fazem parte de seus conhecimentos prévios sobre função.

A segunda reflexão acontece em relação aos conceitos de regra e condição de função já que durante o processo de elaboração conceitual alguns alunos ora tratam a regra de uma função como condição, ora tratam a condição de uma função como regra. Para o aluno GATO e para o aluno PEIXE, a regra de uma função é determinada somente pela equação. O que representa a condição dessa mesma função é o fato da variável n ter que ser um número natural não nulo. Ao refletir melhor sobre a pergunta, o aluno GATO afirma que a condição está relacionada ao fato de existir um único valor da variável dependente para todo valor da variável independente. Nesse momento, então, realmente pode-se comprovar a dubiedade que esse conceito suscita na mente dos alunos.

Ao continuar a discussão diante do desafio de estabelecer a diferença entre regra e condição, o aluno GATO afirma que regra é a lei da função que está relacionada à equação. Não explica, porém, o que representa essa condição. O aluno PEIXE afirma que uma regra nunca se altera, mas a condição pode ser modificada, dependendo da situação. Para ambos o que representa a regra do problema 1 é a equação $p = 12 + 0,65n$.O aluno GATO afirma que o fato de n pertencer a N* (conjunto dos números naturais não nulos) é a condição para que a função se torne verdadeira, ou seja, representa o domínio dessa função. Enquanto que o fato de existir um único valor de p para todo valor atribuído a n representa a condição para ser função.

O aluno PEIXE resume a situação da seguinte forma utilizando como base o problema 1, a regra é representada por $p = 12 + 0,65n$, o domínio se relaciona ao fato de n pertencer a N* e a condição, ao fato dos valores atribuídos à variável p serem únicos.

Conclui que para ser função, a relação tem que obedecer a condição e a regra. O aluno GATO acrescenta que não basta ter apenas uma regra porque se uma das condições não for atendida então não se tem a representação de uma função.Novamente a problemática relacionada ao conceito e à caracterização de uma função por meio da utilização de conjuntos se faz presente.

O conceito de função de Dirichlet não trata a relação entre as variáveis por meio da relação entre conjuntos. Esse fato pode ter contribuído para a dubiedade nas interpretações sobre os conceitos de regra e condição de uma função. Decide-se inserir um novo conceito sobre função mais moderno e mais próximo de seus conhecimentos prévios, utilizando, portanto, o conceito de relação entre conjuntos, introduzida a partir da Intervenção 11.

Ausubel, Novak e Hanesian (1980) consideram que após os primeiros contatos entre o subsunçor e o novo conceito, eles se modificam, tornando-se cada qual um novo elemento na estrutura cognitiva do aprendiz. O processo de assimilação não se encerra nesse momento. Este autor afirma que após essa modificação, ambos os conceitos se distanciam um do outro para que o indivíduo possa se apropriar de cada novo conhecimento surgido, mantendo ainda parte de suas características originais.

O fato, portanto, dos alunos necessitarem da explicitação do domínio da função e o fato de utilizarem constantemente a palavra condição para tratar sobre o conceito de função, pode revelar essa conservação das características originais. Por outro lado, o fato de considerarem a relação entre variáveis como uma relação que deve respeitar a unicidade da variável dependente para todo valor atribuído à variável independente também pode trazer consigo uma conservação das características do novo conceito, o conceito de função de Dirichlet, recentemente modificado. Conclui-se então que, na compreensão dos alunos:

- para que uma relação seja uma função é necessário que as condições de existência e de unicidade sejam obedecidas e que a regra esteja estabelecida;
- o conceito de regra de uma função se relaciona ao conceito de equação;

6.2. Intervenção 11 – Os conceitos modernos de função – Elon Lages Lima e Geraldo Ávila

Este encontro acontece em 30/08/07 durante 72 minutos e, são abordados os conceitos de função que utilizam como base a Teoria dos Conjuntos, de acordo com os

autores Elon Lages Lima (1998) e Geraldo Ávila (1993). Os objetivos deste encontro são refletir e discutir sobre os elementos que surgem com a introdução de conceitos mais modernos sobre função, bem como, construir os conceitos de domínio, contradomínio, imagem e lei de formação diante de uma discussão teórica e aplicada da matemática.

Na 1ª parte, os alunos têm seus primeiros contatos com uma nova forma de interpretar e compreender o conceito de função. Iniciam um novo processo de assimilação do conceito diante da utilização de seus subsunçores já modificados e o novo conceito pautado nas idéias de dois diferentes autores.

Para Lages Lima (1998, p. 38), "dados os conjuntos X, Y, uma função f: $X \to Y$ é uma regra que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$". O autor acrescenta que o conjunto X é denominado de domínio de f, o conjunto Y, de contradomínio de f e o elemento f(x), pertencente ao contradomínio, é denominado de imagem de x pela função f.

A princípio o autor não trata das condições de uma função. Porém, posteriormente, apresenta a idéia de que a regra de uma função está sujeita a duas condições: não deve haver exceções e não pode haver ambigüidades. No primeiro caso, o autor diz que "a fim de que a função f tenha o conjunto X como domínio, a regra deve fornecer f(x), seja qual for $x \in X$ dado" (LAGES LIMA, 1998, p. 41). No segundo caso, explica que "a cada $x \in X$, a regra deve fazer corresponder um único f(x) em Y". (LAGES LIMA, 1998, p. 41).

Para Ávila (1992, p. 78) "uma função ´f: $D \to Y$´ é uma lei que associa elementos de um conjunto D, chamado o domínio da função, a elementos de um outro conjunto Y, chamado o contradomínio da função". O autor enfatiza a idéia de domínio e contradomínio afirmando que este último geralmente é um conjunto fixo o que não acontece com o domínio, já que cada função apresenta o seu próprio domínio e ainda que "todos os elementos do domínio são objeto de ação da função" (Ávila, 1992, p. 78).

Outro aspecto que o autor explicita é a caracterização das variáveis dependente e independente, aspecto este não apresentado pelo autor anterior. Ávila afirma que ao se utilizar a notação y = f(x), "x denota qualquer valor no domínio D, por isso mesmo chama-se variável de domínio D, a chamada variável independente" (ÁVILA, 1992, p. 79). Acrescenta que y é imagem de x pela função f caracterizada como variável dependente dessa função.

A leitura do material entregue aos alunos é realizada pela pesquisadora que precisa recorrer várias vezes à sua releitura no decorrer das discussões. Nos comentários iniciais dos alunos, o aluno GATO afirma que a definição de Lages Lima lhe parece mais direta. E, apesar de ter considerado interessante a ênfase dada ao conceito de domínio por Ávila, ele prefere a definição de Lages Lima. O aluno PEIXE concorda verbalmente com o colega sem tecer outros comentários.

Na percepção de ambos os conceitos de regra e de lei da função são iguais. Constatam que os dois autores tratam inicialmente do conceito de função de uma forma similar. Outra percepção importante se relaciona à presença de conjuntos. Diferentemente do conceito de Dirichlet discutido nos dois encontros anteriores, para se definir uma função é necessária a determinação do seu domínio e do seu contradomínio. Afirmam que a unicidade na função é um elemento imprescindível e que para todo x pertencente ao domínio existe um único y pertencente ao contradomínio.

O aluno GATO afirma verbalmente que a imagem é formada por todos os elementos que apresentam um correspondente no domínio. Mesmo considerando que a imagem faz parte do contradomínio, afirma que a variável y representa os elementos do conjunto imagem. O aluno PEIXE intervém e afirma que a variável y representa os elementos do contradomínio porque o conjunto imagem é um subconjunto do contradomínio. Conclui que para todo x pertencente ao domínio existe um único y pertencente ao contradomínio, e não à imagem.

Pelo fato do aluno GATO ter se mostrado relutante em seu ponto de vista, a pesquisadora intervém utilizando a definição de Ávila, afirmando que "D é um conjunto chamado de domínio e Y é chamado de contradomínio. A função associa os elementos de D aos elementos de Y, não é verdade?". O aluno GATO afirma que o outro autor, Lages Lima, coloca que para cada elemento pertencente ao X (domínio), o elemento f(x) pertence ao Y, e este f(x) denomina-se imagem.

A pesquisadora pergunta "O que é ser imagem?" e o aluno GATO responde que é ter um correspondente no X (domínio). O aluno conclui que para cada x pertencente ao X existe um f(x) pertencente ao Y que se chama imagem da função f. Novamente a pesquisadora pergunta "O que é Y?" e o aluno GATO afirma ser o contradomínio. Continua a afirmar que para todo x pertencente ao domínio existe um único y pertencente ao contradomínio, e que esta é a condição de ser função. Não fica muito claro neste momento se o aluno percebe que utiliza um conceito diferente trocando a palavra imagem por contradomínio.

Como conclusão da discussão, o aluno GATO resume suas idéias afirmando que o que falta na definição de Dirichlet são apenas os conjuntos, que a idéia principal de ser função está implícita em sua apresentação teórica. Na opinião deste aluno, para se definir função é obrigatório definir domínio e contradomínio. Considera a imagem subconjunto do contradomínio. A variável x caracterizada como variável independente representa os elementos do domínio e a variável y caracterizada como variável dependente representa os elementos do conjunto imagem. Neste momento, não utiliza o nome contradomínio, mas imagem. Esta pode ser um prova de que ao trocar um conceito por outro na discussão anterior ainda se encontra em processo de elaboração mental na relação entre o conceito de função e os conceitos de contradomínio e imagem. O aluno PEIXE não se pronuncia verbalmente. Parece concordar com todas as idéias do colega.

Nos protocolos, o aluno GATO ressalta que os elementos que formam uma função são "*variáveis, relação de dependência, regra, conjunto e condição (para todo x pertencente a D, existe um único y pertence a CD)*". É importante considerar que D significa domínio e CD contradomínio e não imagem como afirmou anteriormente. Para o aluno PEIXE os elementos formadores de uma função são "*conjuntos (2), variáveis (VD e VI), regra, condição* ($\forall x \in D, \exists! y \in CD$)*, relação de dependência entre variáveis*". Em relação às condições necessárias para uma relação entre dois conjuntos ser uma função, os alunos citam a condição de existência e de unicidade, nesta ordem, assim como apresentou Lages Lima em sua definição sobre função.

As atividades propostas procuram estimular o aluno a refletir sobre as relações específicas entre função e as condições de existência e unicidade, utilizando-se problemas sobre conjuntos (quadro 3).

Quadro 3 – Problemas da Intervenção 11

PROBLEMA	ENUNCIADO	LEI DE CORRESPONDÊNCIA
1	Dados os conjuntos A = {0, 5, 15} e B = {0, 5, 10, 15, 20, 25} seja a relação R de A em B expressa pela fórmula y = x + 5, com x ∈ A e y ∈ B.	**y = x + 5**
2	Dados os conjuntos Y = {a, b, c, d, e}, X = {0, 1, 2, 3, 4} e uma relação D: Y -> X cuja lei de correspondência é expressa pela seguinte condição: cada	**x = par se y = vogal** **x = ímpar se** **y = consoante**

	vogal de Y corresponde a um número par de X e cada consoante de Y corresponde a um número ímpar de X.	
3	A relação T: Z -> R é definida como $p = \sqrt{s}$ onde p ∈ Z e s ∈ R.	$p = \sqrt{s}$

Fonte: adaptado de Giovanni e Bonjorno (2000)

- **Problema 1 – A relação R é uma função**

Na resolução do problema 1, automaticamente os alunos pedem a utilização dos diagramas de Venn, denominado pelo aluno PEIXE como "ovinhos". O aluno GATO, descrevendo o processo verbalmente, acrescenta que após a representação dos conjuntos é necessária a substituição dos elementos do conjunto A na regra com a finalidade de encontrar correspondentes no conjunto B. Todas as ações são feitas pela pesquisadora utilizando-se da lousa.

Em relação à 1ª pergunta "Todos os elementos de A apresentam um elemento correspondente em B?", os alunos respondem afirmativamente. O aluno PEIXE acrescenta que, neste caso, a condição da existência está sendo satisfeita. Em relação à 2ª pergunta "Cada elemento de A apresenta uma única correspondência em B?", os alunos também se manifestam positivamente. O aluno PEIXE novamente acrescenta que a condição da unicidade está sendo satisfeita. Ambos concluem, sem discutir, que a relação R se caracteriza como função.

O aluno GATO justifica sua escolha, tanto verbalmente quanto no protocolo, afirmando que R é uma função porque satisfaz as condições. O aluno PEIXE utiliza duas justificativas diferentes. Verbalmente afirma que a relação R é função porque tem variável; no protocolo revela que a relação R é função porque satisfaz a todas as condições. O aluno GATO conclui posteriormente que a condição é o aspecto mais importante da função.

Diante da afirmação, a pesquisadora pergunta "E se não tivesse $y = x + 5$?". O aluno responde que a condição e a regra são os aspectos mais importantes da função. Refletindo, afirma que na verdade, tudo é importante. É necessário definir os elementos do domínio, os elementos do contradomínio, a regra que estabelece a relação entre os dois conjuntos e se essa relação satisfaz as condições.

Tanto o aluno GATO quanto o aluno PEIXE concordam que o domínio é representado pelo conjunto A = {0, 5, 15}, o contradomínio pelo conjunto B = {0, 5, 10, 15, 20, 25} e a imagem pelo conjunto {5, 10, 20}. Para o aluno GATO o conjunto imagem não é o conjunto B porque nem todos os elementos que pertencem a ele têm um

correspondente no domínio. Ao serem solicitados a justificar o porquê da escolha do conjunto A como domínio, os alunos afirmam que se trata da posição do conjunto, ou seja, o fato de estar do lado esquerdo da representação matemática R: A → B.

A pesquisadora questiona "E se fosse colocado assim: R: B ← A?". O aluno GATO a princípio afirma que não podem ser modificados os padrões. Em seguida, afirma que o conjunto domínio deve estar no início da reta, na origem. O aluno PEIXE afirma que a variável x é representante do domínio, e sendo ela uma variável independente, os valores devem ser atribuídos a ela. Assim, independente da posição, o conjunto que for representado pela variável independente é o domínio da função.

O aluno GATO concordando com o colega afirma que a variável independente pertence ao domínio e a variável dependente representa os elementos do contradomínio. Em seguida, afirma que a variável dependente representa os elementos da imagem. Neste momento, o próprio aluno percebe que realmente está confuso sobre a relação entre variável, contradomínio e imagem.

- **Problema 2 – A relação D não é uma função, a condição da unicidade não é satisfeita**

Utilizando a mesma representação do diagrama de Venn e estabelecendo a relação de cada elemento de Y a cada correspondente de X por meio de setas, o aluno GATO percebe que a variável independente representa o conjunto Y.

Em relação à pergunta "Todos os elementos de Y apresentam um elemento correspondente em X?" o aluno GATO se posiciona afirmativamente tanto verbalmente quanto no protocolo. O aluno PEIXE diz verbalmente que nem todos os elementos de Y apresentam um correspondente no conjunto X. Porém, no protocolo se posiciona de forma contrária. Reconhece posteriormente que confundiu a condição da existência com a condição da unicidade.

Em relação à pergunta "Cada elemento de Y apresenta uma única correspondência em X?", ambos os alunos se posicionam negativamente. Reconhecem que as vogais do conjunto Y apresentam mais de uma correspondência no conjunto X. Concluem que a relação D não é uma função. O aluno GATO afirma verbalmente que basta um elemento do domínio não satisfazer a condição da unicidade, a relação deixa de ser função, mesmo que a condição de existência seja satisfeita, mesmo que essa relação tenha domínio, contradomínio e que a regra esteja explicitamente apresentada.

A justificativa nos protocolos é similar à apresentada pelo aluno GATO. Afirmam que uma das condições não está sendo satisfeita e, portanto a relação D não é uma função. Afirmam ainda que, pelo fato dessa relação não ser função não tem domínio, contradomínio, nem imagem.

- **Problema 3 – A relação T não é uma função, a condição da existência não é satisfeita**

Neste problema, é explicado aos alunos que devem considerar Z o conjunto dos números inteiros e R o conjunto dos números reais. O aluno GATO inicia a discussão afirmando que o número -1 não tem um correspondente. Logo em seguida, revela que se confundiu. Percebe que deve atribuir valores a p porque p é uma variável independente e representa os valores do domínio. O aluno PEIXE afirma que nem todos os elementos de Z apresentam um elemento correspondente em R, os números negativos, por exemplo. Para os alunos, somente esse fato é suficiente para dizer que a relação T não é função, pois a condição de existência não é satisfeita.

O aluno GATO acrescenta que para transformar essa relação em função é necessário modificar o domínio, do conjunto dos números inteiros, para o conjunto dos números naturais. O aluno PEIXE intervém e prefere modificar o domínio para o conjunto dos reais para que a relação se torne uma função. Tanto verbalmente quanto nos protocolos, os alunos concluem que existem elementos do conjunto Z que não apresentam correspondência no conjunto R. Manifestando-se apenas nos protocolos, os alunos posicionam-se de forma positiva para a condição da unicidade. Ainda assim concluem que a relação T não é uma função pelo fato de não satisfazer a uma das condições. Afirmam novamente que essa relação não apresenta domínio, contradomínio, e imagem.

Durante todo o encontro é perceptível que os alunos trabalham de forma mais natural, sem grandes contradições, com maior fluência nas colocações verbais e também escritas. Praticamente em todos os momentos, o aluno GATO e o aluno PEIXE utilizam o conceito de função relacionado ao conceito de relação entre variáveis, mesmo que as novas definições tratem de uma relação entre conjuntos.

Acredita-se que pelo fato dos subsunçores do conceito de função terem sido desenvolvidos a partir do conceito de relação entre conjuntos, ao longo de suas vidas escolares, a ancoragem do novo conhecimento sobre função se torna mais simples já que os subsunçores e o novo conhecimento são semelhantes.

Outro ponto importante a ser ressaltado é o fato dos alunos ora tratarem a variável dependente como representante do contradomínio da função, ora tratarem-na como representante do conjunto imagem. É possível que, pelo fato dessa relação entre variáveis e conjuntos ser um conhecimento novo, ele esteja ainda em processo de elaboração mental. Pensar em ambas as relações ao mesmo tempo, ou alternadamente, pode ser uma forma de testar qual é a relação mais adequada. Além disso, os alunos preferem compreender a imagem como conjunto e não como elemento. A principal relação se estabelece entre imagem como subconjunto do contradomínio.

- **Definições escritas dos conceitos**

Na 4ª parte dessa intervenção, é solicitado aos alunos o preenchimento dos protocolos com suas próprias palavras para enunciar os conceitos de função, lei de correspondência, domínio, contradomínio e imagem respectivamente.

O aluno GATO escreve que função "*é uma relação de correspondência entre dois conjuntos que obedece a uma regra e a uma condição (para todo x pertencente a D, existe um único y pertencente a CD) onde D e CD são os conjuntos que fazem parte dessa relação*". O aluno PEIXE escreve que função "*é uma regra que associa um elemento de um conjunto a outro conjunto*".

O aluno GATO que no período inicial da Entrevista e do Questionário trouxe a idéia de função vinculada ao conceito de relação entre conjuntos, retorna às origens. O aluno PEIXE também modifica seu pensamento. Caracterizou função a princípio como uma relação entre números, passou para a relação entre variáveis e chega na relação entre conjuntos. É possível que, de acordo com os pressupostos de Ausubel, Novak e Hanesian (1980), seus subsunçores sofreram alterações no decorrer das discussões. Por outro lado, o conceito de função apresentado tanto por Lages Lima (1998) quanto por Ávila (1993) também sofrem modificações.

Pode-se perceber que nenhum dos autores define função exatamente como uma relação entre conjuntos como apresentado pelo aluno GATO. Também não definem função como uma regra que associa elementos de conjuntos diferentes. Lages Lima (1998) afirma que função é uma regra que diz como associar elementos de conjuntos distintos. Na realidade não é a regra que faz a ação de associar, ela simplesmente dita as normas de como acontece essa associação, pois, na realidade quem associa é a própria função.

Em relação ao conceito de lei de correspondência, o aluno GATO escreve que "*é a regra que diz como deve ser associado os elementos do domínio com os do contradomínio*". O aluno PEIXE afirma que "*é a regra que leva um elemento do domínio ao contradomínio*". É possível que ambos associem o conceito de lei de correspondência ao conceito de regra, aquela que diz como deve ser o comportamento da função.

Para o conceito de domínio, o aluno GATO coloca que "*é um conjunto ao qual pertence a variável independente*". O aluno PEIXE afirma ser "*o conjunto que contém as variáveis independentes*". Novamente ambos consideram o domínio como um conjunto e o relaciona ao conceito de variável independente. Essa relação surge nas discussões das intervenções, pois não foi contemplada a relação entre conjuntos e variáveis nos questionários.

Para o conceito de contradomínio, o aluno GATO afirma que "*é o conjunto ao qual os elementos do domínio podem se relacionar*". O aluno PEIXE afirma ser "*o conjunto que contém as variáveis dependentes*". A idéia dos alunos toma rumos diferentes. Enquanto o aluno PEIXE conserva a relação entre conjuntos e variáveis, o aluno GATO prefere não fazê-lo. É possível que o aluno GATO prefira estabelecer relação entre o conjunto domínio e contradomínio do que entre variável dependente e contradomínio por ainda não ter certeza que esta última relação seja verdadeira.

Para o conceito de imagem, o aluno GATO escreve que "*são os elementos do contradomínio que possuem um elemento correspondente no domínio*". O aluno PEIXE afirma que "*é um subconjunto do contradomínio que contém somente os elementos que estão associados através da função ao domínio*". Apesar de utilizar linguagens próprias e diferentes os alunos trazem o mesmo significado para o conceito de imagem. Associam-na aos conceitos de contradomínio e de domínio, como um produto final dessa relação. Não fazem qualquer menção sobre a relação existente entre variável dependente e conjunto imagem, como apresentada pelo aluno GATO durante vários momentos desta intervenção. O conceito que traziam inicialmente sobre conjunto imagem se manteve inalterado, diferentemente do que ocorreu com o conceito de domínio e contradomínio.

Percebe-se que, na compreensão dos alunos:

- função é uma relação entre conjuntos que obedece a uma regra;
- a lei de correspondência de uma função é a regra da relação estabelecida entre os elementos do domínio e do contradomínio;

- domínio é o conjunto que contém elementos representados pela variável independente da função;
- imagem é o conjunto que contém os elementos do contradomínio que apresentam correspondência com os elementos do domínio;

6.3. Intervenção 14 – Os mapas conceituais sobre o conceito de função

Este encontro acontece em 12/09/07 durante 81 minutos e, é abordado o conceito de função de Lages Lima (1998), devido ao fato dos alunos o terem escolhido por contribuir com elementos mais significativos sobre o conceito. O objetivo é compreender e descrever como os alunos se organizam mentalmente para escolher e relacionar o conceito de função e seus conceitos subjacentes.

Na 1ª parte, os alunos recebem dois exemplos de mapas conceituais, bem como o mapa conceitual que desenvolveram sobre o tema "noção de conjuntos". Ao realizarem as leituras não fazem comentários. Na 2ª parte é apresentado aos alunos as fases para a construção de mapas conceituais como sugestão para o desenvolvimento do trabalho, baseados nos pressupostos teóricos de Ontoria et al. (2005) e nas estratégias desenvolvidas por Paiva e Freitas (2005):

1. **Escolher os principais conceitos** – selecionar os conceitos-chave do conteúdo do texto ou do tema;
2. **Distribuir os conceitos hierarquicamente** – selecionar os conceitos por ordem de inclusão;
3. **Relacionar os conceitos** – estabelecer as relações entre os conceitos por meio das linhas ou setas;
4. **Escolher e aplicar as palavras de ligação entre os conceitos** – explicitar as relações entre os conceitos para construir unidades semânticas por meio das linhas que são indicadas por uma ou mais palavras de enlace (ou de ligação)
5. **Atribuir significados** – atribuir significados aos conceitos e às conexões entre os conceitos;
6. **Construir proposições** – construir as proposições simples por dois conceitos unidos por palavras de enlace (ou de ligação);
7. **Estabelecer relações** – estabelecer as relações horizontais e verticais.

O texto que trata sobre o conceito de função de acordo com as idéias de Lages Lima (1998) também é disponibilizado para os grupos da seguinte maneira:

"Dados os conjuntos X, Y, uma função f: X -> Y é uma regra que diz como associar a cada elemento x∈ X um elemento y = f(x)∈ Y. O conjunto X chama-se o domínio e Y o contradomínio da função f. Para cada x∈ X, o elemento f(x)∈ Y chama-se a imagem de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto x∈ X. A natureza da regra que ensina como obter f(x) quando é dado x é inteiramente arbitrária, sendo sujeita apenas a duas condições:

a) Não deve haver exceções: a fim de que a função f tenha o conjunto X como domínio, a regra deve fornecer f(x), seja qual for x ∈ X dado.

b) Não pode haver ambigüidades: a cada x ∈ X, a regra deve fazer corresponder um único f(x) em Y." (Adaptado de LAGES LIMA, 1998, p. 38 e 41).

A leitura é realizada a princípio pela pesquisadora, mas no decorrer de todo o encontro os alunos recorrem várias vezes ao texto para consultar o que é apresentado pelo autor. Na 3ª parte, os alunos recebem o protocolo a ser preenchido gradativamente com formatação baseada nas fases de construção de mapas conceituais, acima citadas. Seu preenchimento não é obrigatório, embora os grupos tenham utilizado parcialmente o material.

A preocupação inicial dos alunos é visualizar o esquema gráfico, a disposição dos conceitos no plano e estabelecer rapidamente as relações conceituais. Em alguns momentos utilizar as estratégias sugeridas entra em confronto direto com o desejo que aparentam ter em relação à visualização do mapa pronto e acabado. Esse fato pode justificar a utilização parcial dos protocolos escritos, em prol da utilização de folhas de rascunho para construir os esquemas visuais.

O grupo GATO inicia seu processo destacando os principais conceitos apresentados no texto. Foram eles: função, conjuntos, contradomínio, domínio, imagem, regra, elemento, condições $\forall x \in D, \exists! y \in \text{Im}$. Considera-se que D representa o conjunto domínio e Im o conjunto imagem. O grupo PEIXE lista as seguintes palavras: função, regra, conjunto, domínio, contradomínio, imagem, condição $\forall x \in X, \exists! y \in Y$. Sabe-se que o conjunto X representa o domínio da função, porém, o conjunto Y, ainda não tem classificação.

O grupo GATO realiza a hierarquização dos conceitos da seguinte maneira:

1. conceito de função;

2. conceitos de conjunto, contradomínio, domínio e imagem, considerando-os como integrantes de um mesmo nível hierárquico;
3. conceitos de elemento, regra e condição.

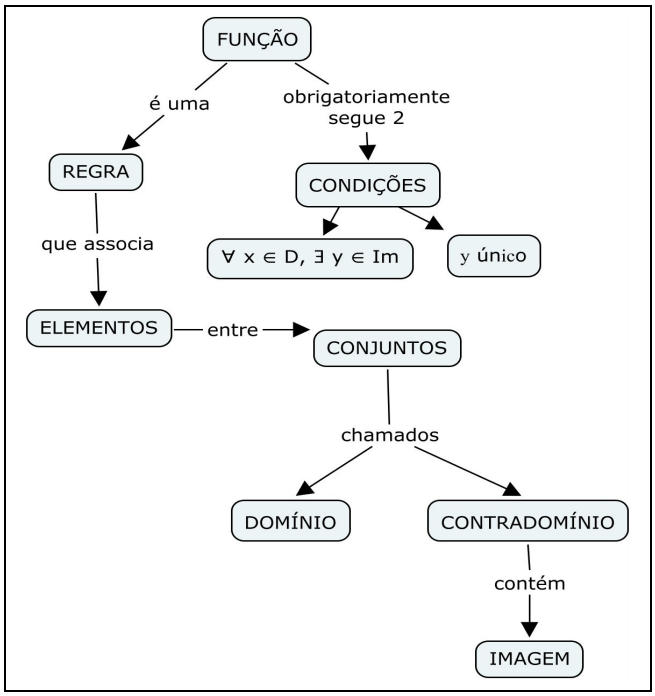
A disposição hierárquica considerada pelo grupo PEIXE se desenvolve de forma diferenciada, conforme a listagem abaixo:

1. conceito de função;
2. conceitos de regra, conjunto, domínio e contradomínio no mesmo nível hierárquico, e;
3. imagem e condição.

Os alunos desenvolvem a relação entre os conceitos considerando a hierarquização desenvolvida anteriormente. O grupo GATO relaciona o conceito de função diretamente aos conceitos de regra, conjuntos e condição, desconsiderando parcialmente a ordem hierárquica. É importante observar que este grupo se preocupa em utilizar os conceitos principiais sem repeti-los. A valorização parece estar concentrada mais no aspecto visual e na significação das relações do que propriamente na hierarquização dos conceitos. Os alunos trabalham com as interligações conceituais, atribuindo a cada relação suas respectivas palavras de ligação.

A princípio, o grupo GATO considera que "*função é uma regra que associa elementos entre conjuntos chamados domínio e contradomínio*", (figura 11) apresentando um raciocínio diferente daquele relatado anteriormente no qual considerava que uma função é uma relação entre conjuntos que obedece a uma regra representada por uma equação. Além disso, o fato da função ter que obedecer a duas condições é considerado relevante, pois as explicita separadamente na representação gráfica.

Figura 11 – Construção do Mapa Conceitual de função – grupo GATO

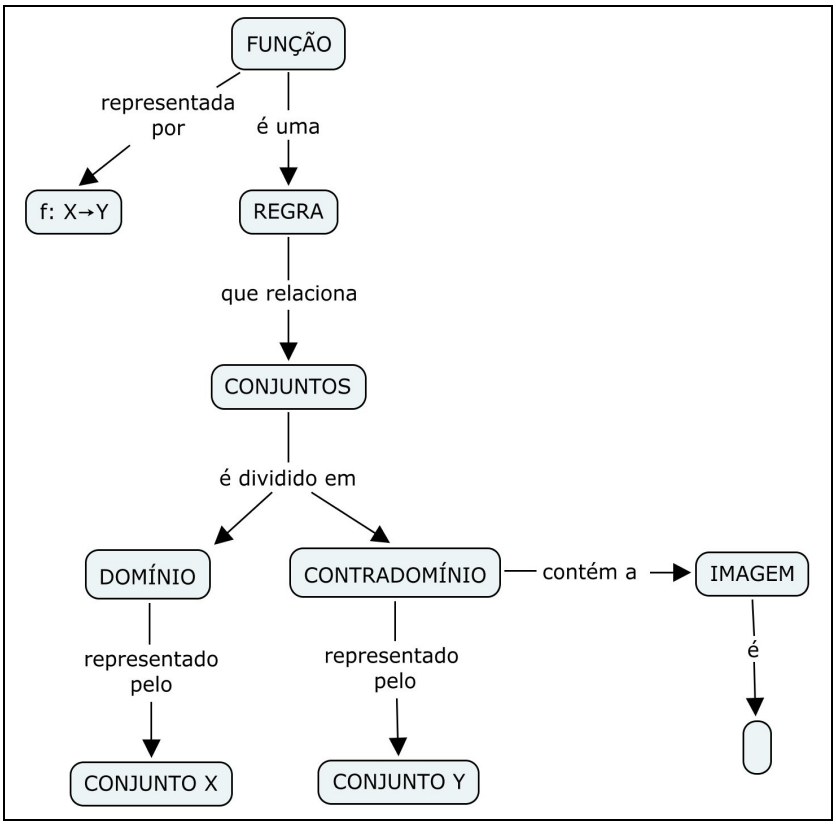


Fonte: grupo GATO

Uma observação deve ser feita em relação à palavra "obrigatoriamente". A definição de Lages Lima (1998) não apresenta essa palavra, nem ao menos considera as condições de uma função obrigatórias, mas uma conseqüência da definição de ser função. Esse aspecto parece ter sido utilizado pelo próprio grupo para se certificar da necessidade da utilização dessas condições como garantia da relação matemática se tornar função.

O grupo PEIXE apresenta um esquema visual de forma diferente do grupo anterior (figura 12). Considera que "*função é uma regra que relaciona conjuntos e é dividido em domínio, representado pelo conjunto X, e contradomínio, representado pelo conjunto Y*". Utiliza uma definição diferente daquela apresentada na Fase 1 onde enfatizava que o conceito de função é uma relação entre dois conjuntos que obedece uma regra. Esse grupo não ressalta as condições apresentadas por Lages Lima (1998) para que essa regra se caracterize função.

Figura 12 – Construção do Mapa Conceitual de função – grupo PEIXE



Fonte: grupo PEIXE

O grupo GATO subdivide seu protótipo de mapa conceitual em duas partes: definição e condição. Fica explícito neste momento que o grupo necessita separar as condições da função da própria definição. Criam inclusive significados diferenciados para nomear cada parte de suas construções. O grupo PEIXE atribui significados às relações estabelecidas entre os conceitos após ter realizado algumas alterações em seu esquema original. Acrescenta as condições das funções apresentadas por Lages Lima (1998), além da representação da função e da relação entre contradomínio e imagem.

Ao realizar as modificações o grupo GATO cria novas proposições para o protótipo de mapa conceitual: "*função é uma regra que relaciona conjuntos através da condição que é* $\forall x \in X, \exists! y \in Y$ " e "*função é uma regra que relaciona conjuntos que é dividido em domínio e contradomínio*". A separação entre a definição de função e suas respectivas condições, pode denotar uma forma de desvinculação dessas condições em relação ao conceito de função propriamente dito. Esse fato se torna mais evidente na atribuição dos significados a grupos de informações que os alunos visualizam no esquema gráfico.

Diferentemente do outro grupo, os alunos do grupo PEIXE constróem quatro conjuntos de significados para seu protótipo de mapa conceitual: definição de função,

definição dos conjuntos da função, definição do conjunto domínio, definição do conjunto contradomínio. Além das condições serem consideradas como parte integrante da definição do conceito de função, a representação dessa função também é considerada relevante e integrada à organização esquemática do conceito.

O grupo GATO após atribuir os significados para seu esquema gráfico construído prefere incrementar novos elementos à estrutura desenvolvida. Especifica a função, os elementos e os conjuntos atribuindo-lhes uma representação algébrica. Amplia o conceito de função e, de acordo com a opinião do grupo, considera essa apresentação visual mais compreensível do que a anterior. Os alunos desenvolvem, diante da leitura e da atribuição de significados de suas construções, algumas proposições relevantes. No caso do grupo GATO, os alunos afirmam que:

- função é representada por f: A -> B;
- função obrigatoriamente obedece a duas condições:
- qualquer que seja x pertencente a D, existe um y pertencente a CD;
- qualquer que seja x, existe um único y.
- função é uma regra que associa o elemento x pertencente ao conjunto A (denominado Domínio) ao elemento y pertencente ao conjunto B (denominado contradomínio).

O grupo destaca a representação, as condições e a definição de função separadamente. Considera ainda que função é uma regra capaz de associar elementos de dois conjuntos definidos como domínio e contradomínio.

No caso do grupo PEIXE, os alunos afirmam que:

- função é uma regra que relaciona conjuntos, através da condição que é qualquer que seja x pertencente a X, existe um único y pertencente a Y;
- função é representada por f: X -> Y;
- os conjuntos são divididos em contradomínio e domínio;
- domínio é representado pelo conjunto X;
- contradomínio é representado pelo conjunto Y;
- contradomínio contém o Conjunto Imagem, definido por y pertencente a Y; f(x) = y.

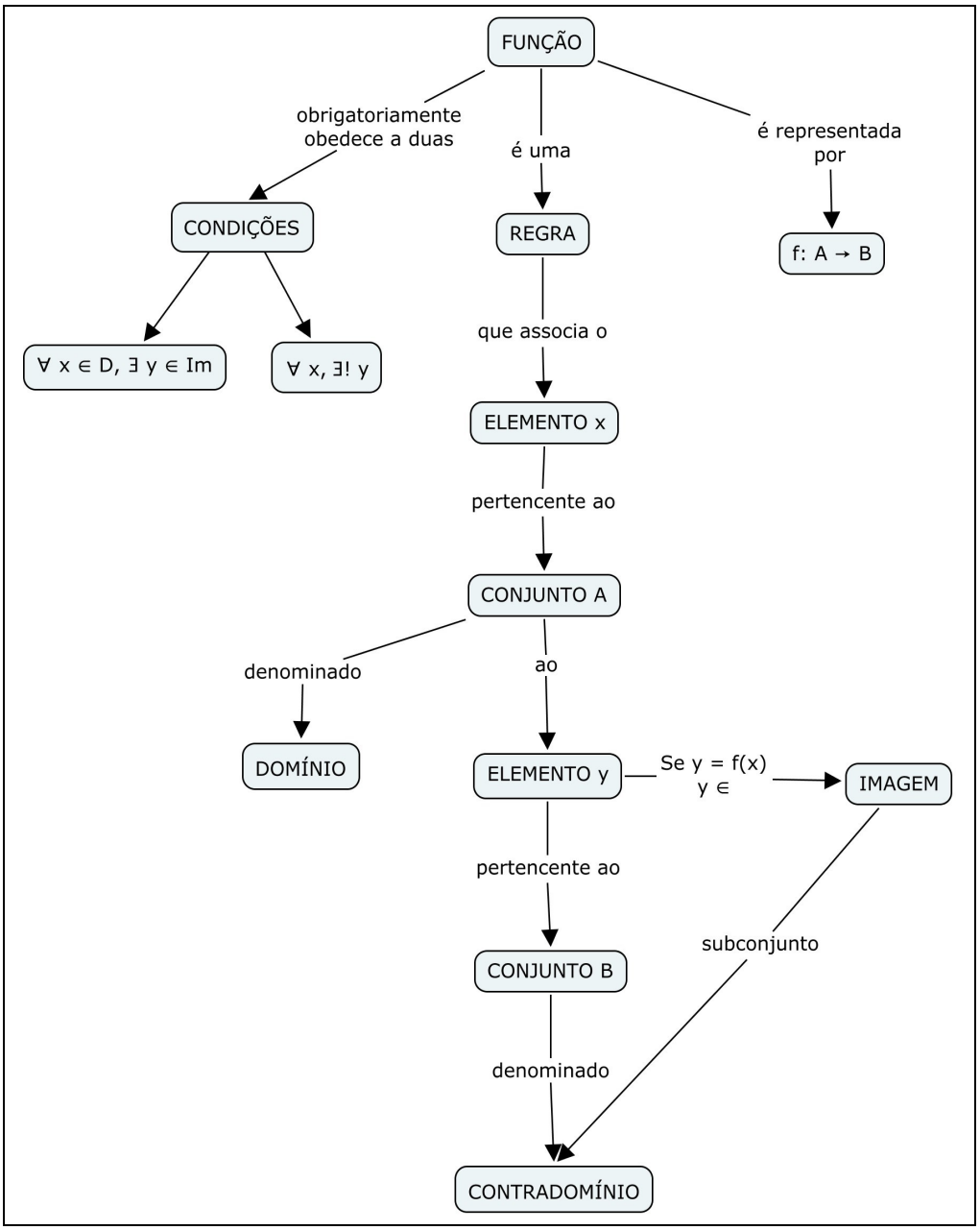
É possível identificar que o grupo destaca a definição e a representação da função, bem como a representação do domínio e do contradomínio e sua relação com o

conjunto imagem. Considera também que função é uma regra capaz de relacionar conjuntos por meio de uma condição de unicidade.

A confecção dessas proposições e a leitura de cada uma delas proporciona novos momentos de reflexão e intensa discussão entre os integrantes de cada grupo. Enquanto o maior desafio para o grupo GATO é encontrar uma maneira de representar a relação entre contradomínio e imagem, para o grupo PEIXE é simplificar a conceituação de função a fim de proporcionar uma leitura mais linear do conceito.

O que se pode compreender do mapa conceitual final do grupo GATO (figura 13) é que "*Função é uma regra que associa o elemento x pertencente ao Conjunto A, denominado Domínio, ao elemento y pertencente ao Conjunto B, denominado Contradomínio*". Verifica-se uma modificação na apresentação do conceito de função. Apesar dos elementos básicos continuarem a ser os mesmos, ou seja, os conceitos de regra, condição, domínio e contradomínio ainda são enfatizados e contemplados nas definições, a ênfase em determinados conceitos se altera. O conceito de função é definido a partir do conceito de regra e não mais do conceito de relação entre conjuntos.

Figura 13 – Mapa Conceitual de Função – grupo GATO



Fonte: grupo GATO

O contato com um novo conceito, como o conceito de Lages Lima (1998), pode ter contribuído com novos elementos para os subsunçores relacionados ao conceito de função. Só este fato, porém, não significa que obrigatoriamente há uma real modificação do que os alunos pensam sobre o conceito de função. Esses resultados parciais são apenas indícios de que os subsunçores se modificaram. Por outro lado, é importante destacar que o conceito teórico apresentado aos alunos também sofre modificações, como preconiza Ausubel no princípio da Assimilação.

Lages Lima (1998) afirma que função é uma regra que diz como associar elementos de dois conjuntos. Para o grupo GATO, função é uma regra que associa elementos de um conjunto em outro. O que pode se deixar transparecer é que, neste último caso, é a regra que associa elementos e não a função. As idéias são muito próximas, mas não são exatamente iguais. Esse aspecto pode exemplificar o que Ausubel afirma sobre o contato entre o subsunçor e o novo conhecimento. Não são somente os subsunçores que se modificam, o novo conhecimento também se transforma.

Esse aspecto foi identificado na Fase 1, tanto nos primeiros contatos com a definição de Dirichlet, quanto nos primeiros contatos com a definição de Lages Lima. Parece que, na construção dos mapas conceituais, os alunos vivenciam constantemente esses momentos, alterando seus subsunçores, bem como as novas definições sobre função. Pode ser que estejam se aprofundando nas discussões de uma única idéia sobre o conceito.

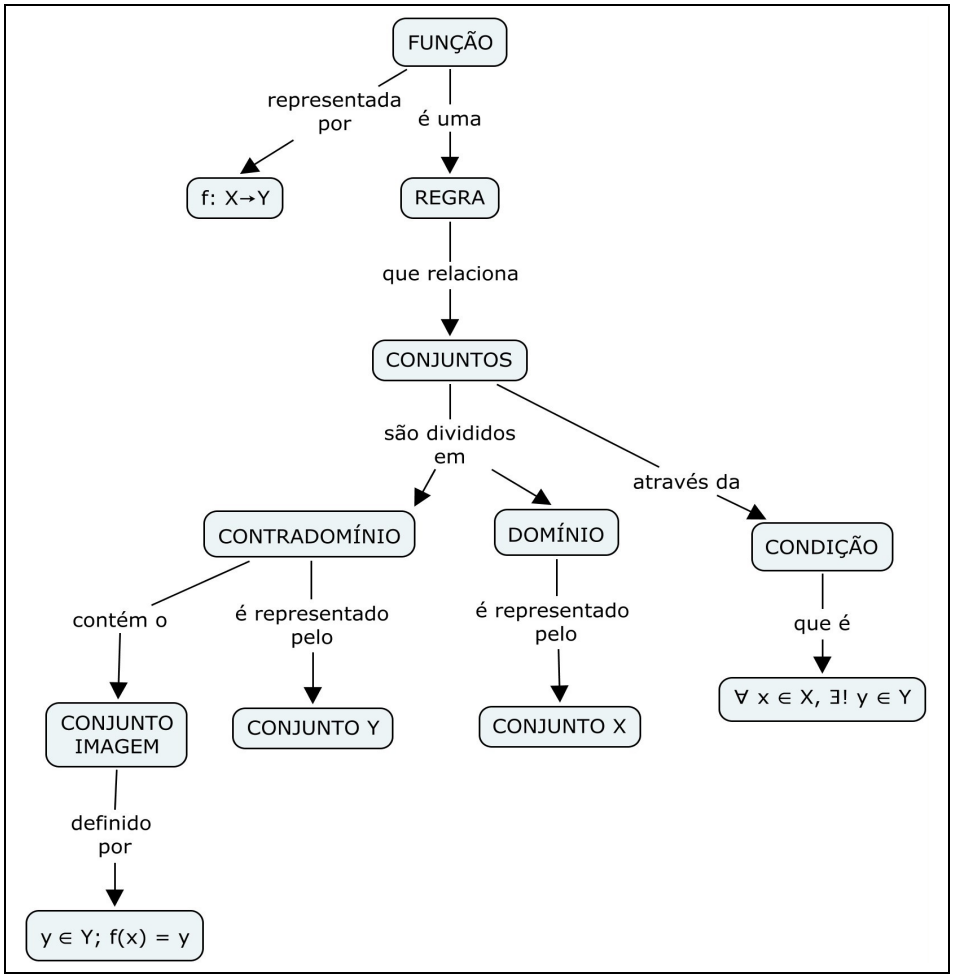
Compreende-se do mapa conceitual final do grupo PEIXE (figura 14) que "*Função é uma regra que relaciona Conjuntos através da condição que é* $\forall x \in X, \exists! y \in Y$". Outra leitura também pode ser realizada: "*Função é uma regra que relaciona Conjuntos divididos em Domínio e Contradomínio*". Verifica-se que, também neste caso, alterações são realizadas no conceito de função. O que antes era classificado como uma relação de dependência entre conjuntos, com ênfase na regra, agora se torna a própria regra. Conceitos básicos como domínio, contradomínio e elementos ainda são contemplados no mapa conceitual.

Observa-se que, diferentemente do grupo anterior, os integrantes deste grupo preferem conservar o significado da palavra relação, mesmo que o autor principal não a tenha utilizado. É possível que seus subsunçores tenham se alterado e incrementado novos elementos ou enfatizando elementos já existentes. O grupo PEIXE também não utiliza o conceito de Lages Lima na íntegra, incorporando todos os elementos e atribuindo-lhes os mesmos significados. Afirmar que função é uma regra que relaciona conjuntos apresenta um significado diferente de afirmar que função é uma regra que diz como associar elementos de dois conjuntos.

Esse fato também ilustra a modificação que o novo conhecimento sofre ao entrar em contato com os subsunçores do aprendiz. Além disso, apesar da definição do autor

não apresentar como elemento principal o conceito de condição de função, esse grupo prefere incluí-lo como conceito integrante e fundamental para a definição de função.

Figura 14 – Mapa Conceitual de Função – grupo PEIXE



Fonte: grupo PEIXE

Apesar de modificações nos subsunçores e no novo conhecimento terem acontecido, elementos próprios de cada um deles são conservados. Os conceitos de conjuntos, domínio, contradomínio e imagem continuam a existir. O conceito de condição, sobretudo, a condição de unicidade, torna-se um elemento fundamental para a caracterização de função.

O conceito de variável não é citado em nenhum mapa conceitual. Como o texto apresentado não trata desse conceito é possível que não tenha suscitado a necessidade de contemplá-lo na confecção dos mapas. Pode ser também que esse conceito ainda esteja em processo de ancoragem em seus subsunçores e tenha entrado no processo de assimilação obliteradora. Como não é possível obter alguma comprovação de uma

situação ou de outra, a intervenção 15 tenta provocar nos alunos o interesse pela busca de novas relações para o conceito de função diante da proposta de estabelecer conexões entre o conceito abordado e os conceitos discutidos na Fase 1 da pesquisa.

6.4. Intervenção 18 – Problema 1 – Função e Progressão Aritmética

Este encontro acontece em 25/09/07 durante 60 minutos e, é abordado o conceito de função de Lages Lima (1998), bem como os conceitos de equação e expressão algébrica de Imenes e Lellis (1998), variável dependente, variável independente, variável e incógnita de Soares (2005) e a interconexão entre função e variável dependente e independente de Ávila (1993). O objetivo é compreender e descrever como os alunos se organizam mentalmente para desenvolver um padrão algébrico diante de problemas de Progressão Aritmética e como os alunos caracterizam esse padrão como função.

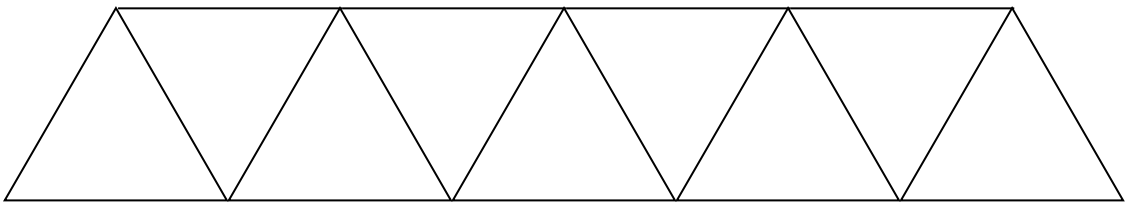
O aluno PEIXE não participa deste encontro por motivos pessoais. Mesmo assim, responde às perguntas do protocolo em momento posterior. Na 1ª parte, os alunos recebem os conceitos formalizados sobre função e os demais conceitos subjacentes, além dos últimos mapas conceituais desenvolvidos.

- **O problema proposto e o processo de desenvolvimento de padrão algébrico**

Na 2ª parte, o enunciado do problema, é apresentado para os alunos para que possam ler e interpretar em conjunto seu significado.

"Para formar triângulos com palitinhos dispostos conforme a figura (15), qual é a relação matemática que se pode estabelecer entre o número de palitos utilizados e o número de triângulos formados?"

Figura 15 – Triângulos dispostos em palitos



Fonte: Elaboração própria

Os alunos escolhem o aluno GATO para ir ao quadro e desenvolver o problema com o auxílio dos colegas e dos questionamentos da pesquisadora. Este aluno, portanto,

inicia o processo desenhando os triângulos conforme apresentado no protocolo. Em seguida, apresenta a seguinte relação para triângulos e palitos:

$$1\ t \rightarrow\ 3\ p$$
$$2\ t \rightarrow\ 3 + 2$$
$$3\ t \rightarrow\ 3 + 2 + 2 = 3 + 2.2$$

Explica verbalmente que com 2 triângulos pode escrever 3 + 2 palitos, com 3 triângulos, pode escrever 3 + 2 + 2 palitos, que é o mesmo que 3 + 2.2. Após a explicação completa o raciocínio da seguinte maneira:

$$1\ t \rightarrow\ 3\ p + 0.2$$
$$2\ t \rightarrow\ 3 + 1.2$$
$$3\ t \rightarrow\ 3 + 2.2$$
$$4\ t \rightarrow\ 3 + 3.2$$
$$n\ t \rightarrow\ 3 + (n - 1).\ 2$$

A pesquisadora questiona quais elementos estão se modificando. O aluno GATO responde que são o número de palitos e o número de triângulos representados respectivamente por n e 3 + (n – 1). 2. Todos os alunos discordam dessa idéia e o aluno GATO, concordando com os colegas, troca os significados, de tal forma que n representa a quantidade de triângulos e 3 + (n – 1).2, a quantidade de palitos.

Ainda para refletir sobre a situação, este aluno verbaliza que para construir 1 triângulo são necessários 3 palitos; 2 triângulos, 5 palitos e assim sucessivamente. O grupo não concorda com a utilização da letra n para a representação das variáveis porque pode trazer a idéia tanto do número de triângulos quanto do número de palitos. Assim, a letra t representa a quantidade de triângulos e p, a quantidade de palitos.

Ao serem questionados como os elementos se modificam, o aluno GATO afirma que o número de palitos inicia com 3 e depois o incremento acontece de dois em dois. O número de triângulos inicia com 1 e aumenta de 1 em 1, formando a seqüência 1, 2, 3, 4, etc. Por fim, afirma que a relação entre o número de palitos e o número de triângulos é p = 3 + (t – 1). 2. Todos os alunos reconhecem essa representação algébrica como a fórmula geral da progressão aritmética, caracterizando o número 3 como seu primeiro elemento e 2 como sua razão.

Em relação ao preenchimento dos protocolos, o aluno GATO escreve a relação entre o número de palitos e o número de triângulos da seguinte forma: "*1 t → 3 p + 0.2 ⇒ ... ⇒ p = 3 + (t – 1).2*" . O aluno PEIXE utiliza uma representação semelhante: "*p = 3 + (t – 1).2*". De acordo com o que diz Sierpinska (1992) é necessário que ao se trabalhar o conceito de função, as variáveis sejam compreendidas dentro do problema. Os alunos devem reconhecer quais delas se modificam e como se modificam na relação que estabelecem. Esse processo é estimulado diretamente pela pesquisadora o que pode ter auxiliado os alunos a reconhecerem as variáveis e suas relações na construção do padrão matemático do problema.

- **A aplicação do padrão algébrico em situações reais**

O objetivo é questionar se o padrão desenvolvido é verdadeiro para quaisquer valores numéricos e com isso prepará-los para definir os conjuntos base para o desenvolvimento da relação enquanto função. O primeiro questionamento é proposto da seguinte forma: "Quantos palitos são necessários para construir 20 triângulos?".

O aluno GATO escreve na lousa a seguinte seqüência:

$$p = 3 + 2.(t - 1)$$
$$p/\ t = 20$$
$$p = 3 + 20.\ (20 - 1)$$
$$p = 3 + 20.\ 19$$
$$p = 3 + 380$$
$$p = 383$$

O grupo sinaliza que esse resultado não está correto porque o número de palitos aumenta de dois em dois e não de 20 em 20 como o representado. O aluno GATO concordando altera a seqüência para:

$$p = 3 + 2.(t - 1)$$
$$p/\ t = 20$$
$$p = 3 + 20.\ (20 - 1)$$
$$p = 3 + 20.\ 19$$
$$p = 3 + 38$$
$$p = 41 \text{ palitos}$$

Conclui que para construir 20 triângulos são necessários 41 palitos.

O questionamento subseqüente é proposto da seguinte forma: “Quantos triângulos podem ser construídos utilizando-se 10 palitos?”. O aluno GATO escreve na lousa a seguinte seqüência:

$$p = 3 + 2.(t - 1)$$

$$p/\ p = 10$$

$$3 + 2.\ (t - 1) = 10$$

$$2.(t - 1) = 7$$

$$t - 1 = \frac{7}{2}$$

$$t = \frac{7}{2} + 1$$

$$t = \frac{9}{2} \Rightarrow \quad t = 4{,}5$$

Conclui que esse resultado não é possível. Pensa inclusive que seus cálculos estão incorretos, mas prossegue afirmando que não é possível construir triângulos dessa forma com 10 palitos. Acrescenta que, neste caso, é possível construir 4 triângulos completos e ainda sobrar 1 palito. Opta por não considerar correta a construção de 4 triângulos com 10 palitos.

Em relação aos protocolos escritos, o aluno GATO escreve exatamente o que desenvolveu na lousa. O aluno PEIXE escreve, para o 1º questionamento, a seguinte seqüência:

$$p = ?$$

$$t = 20$$

$$p = 3 + (t - 1).2$$

$$p = 3 + 19.2$$

$$p = 41$$

Para o 2º questionamento, este aluno escreve:

$$p = 10$$

$$t = ?$$

$$p = 3 + (t - 1).2$$

$$10 = 3 + 2t - 2$$

$$2t = 9 \Rightarrow \quad t = \frac{9}{2}$$

O aluno GATO, pelo fato de estar no quadro, preenche seu protocolo ao final de todas as discussões propostas. Os alunos podem compreender que o número de triângulos e o número de palitos devem ser representados por números naturais, já que palitos quebrados não são considerados no problema. A confirmação desse fato, porém, só é possível, após a definição da relação funcional e de seus respectivos conjuntos.

- **A caracterização do padrão algébrico como função**

O objetivo é compreender quais elementos os alunos destacam para caracterizar o padrão algébrico desenvolvido como função e como justificam essa escolha. A pergunta realizada pela pesquisadora ao iniciar esse processo é a seguinte: "Essa relação representa uma função?". Os alunos, porém, preferem responder primeiramente à próxima pergunta proposta no protocolo que se refere a "Qual é o domínio, o contradomínio e a imagem dessa função?". Esse fato pode indicar que, para os alunos, a definição dos conjuntos domínio e contradomínio é determinante para a caracterização de uma função.

O aluno GATO inicia esse processo afirmando que a relação algébrica do problema representa uma função de t em p. Sempre que for dado um valor para t é possível encontrar um valor para p. Além disso, este aluno considera que somente a representação algébrica do padrão determinado não caracteriza uma função. Falta, em sua opinião, a definição do domínio e do contradomínio.

O aluno GATO afirma que a relação f: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, na qual $\mathbb{N}$ representa o conjunto dos números naturais, é a melhor forma de defini-la como função, com p e t pertencentes ao conjunto $\mathbb{N}$. A função fica bem definida pela expressão f(t) = p = 3 + 2. (t – 1). Justifica-se ao dizer que f é função porque seu domínio, seu contradomínio e sua regra estão determinados. Não satisfeito com sua própria resposta, acrescenta que para cada valor da variável t deve existir um único valor para variável p.

Para comprovar sua idéia, escreve na lousa a seguinte seqüência:

$$f(t_1) = f(t_2)$$
$$3 + 2.(t_1 - 1) = 3 + 2.(t_2 - 1)$$
$$t_1 - 1 = t_2 - 1$$
$$t_1 = t_2$$

O aluno explica que se conseguisse provar que $t_1 = t_2$ dado que $f(t_1) = f(t_2)$ então provaria que o valor para a variável p seria único. Acrescenta

que sua prova matemática não contempla a condição de existência da função, mas, apenas a condição de unicidade. Afirma que não há restrições para a variável p, o que não acontece com a variável t. O número de triângulos não pode ser igual a zero. Assim, a função deve ser definida como f: $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$, na qual $\mathbb{N}^*$ representa o conjunto dos números naturais com exceção do 0. Conclui que f: $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$, p = 3 + 2.(t – 1), com p $\in \mathbb{N}^*$ e t $\in \mathbb{N}$, representa uma função pois seu domínio e seu contradomínio estão definidos e para cada valor de t existe um único valor para f(t), e, portanto, suas condições estão sendo satisfeitas.

Em relação aos protocolos, o aluno GATO escreve que essa relação entre o número de palitos e o número de triângulos representa uma função somente se "*for definido o domínio, o contradomínio e satisfazer as condições*". Define o conjunto domínio como $\mathbb{N}^*$, o conjunto contradomínio como $\mathbb{N}$ e o conjunto imagem como Im = $\{\forall\, t \in \mathbb{N}^* / f(t) = 3 + 2.(t-1)\}$.

O aluno PEIXE escreve que "*escolhendo-se os conjuntos apropriados a relação pode representar uma função, já que* $\forall t, \exists! p$." Define os conjuntos domínio e contradomínio da mesma forma que o colega, como $\mathbb{N}^*$ e $\mathbb{N}$, respectivamente. O conjunto imagem define de uma forma diferente utilizando a letra p no lugar da expressão f(t). Assim, Im = $\{ p \in \mathbb{N}^* / p = 3 + 2.(t-1) \}$ representa o conjunto imagem.

Os alunos utilizam quatro conceitos para definir função: domínio, contradomínio, regra e condições. Utilizam, portanto, os elementos básicos apresentados por Lages Lima (1998) e ainda o fato das condições da existência e da unicidade serem satisfeitas. Os elementos destacados nos mapas conceituais, momento no qual organizavam os conceitos sobre função, são os mesmos destacados para aplicá-los na resolução dos problemas. Definem o conjunto imagem como subconjunto do contradomínio, não necessariamente apresentando os mesmos elementos.

- **A descaracterização da função**

O objetivo é compreender quais os elementos os alunos utilizam para descaracterizar a função e como justificam suas escolhas. A pesquisadora apresenta o seguinte questionamento: "O que você faria para que essa relação entre o número de triângulos e o número de palitos não representasse uma função?".

O aluno GATO explica que se colocasse o domínio igual a $\mathbb{N}$ não haveria um correspondente no contradomínio. Outra hipótese é inverter os papéis das variáveis p e

t. Enquanto p é uma variável independente, t se torna a variável dependente. Não satisfeito com sua própria resposta pensa em outra possibilidade. Diz que se trocar o domínio de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$, o conjunto dos números inteiros, o número -1, por exemplo, não apresenta um correspondente. Percebe, porém, que essa idéia não faz sentido porque não existem números negativos no caso do problema com triângulos.

Para que um elemento do domínio não apresente um correspondente no contradomínio acredita ser necessário eliminar um elemento desse contradomínio. Escreve então que $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N} - \{9\}$ não representa uma função porque existe um valor do domínio que não tem correspondente no contradomínio. A condição de existência não é satisfeita neste caso. Acrescenta que a outra condição, a da unicidade, não é satisfeita se para um único valor da variável t existissem dois valores para a variável p.

Escreve então que $f(t) = \begin{matrix} 3 + 2.(t-1), & t > 1 \\ 5, & t = 1 \end{matrix}$ descaracteriza a função f como função.

Em relação aos protocolos, o aluno GATO afirma que para descaracterizar a função f do problema como função, modifica "*o contradomínio ou a lei da função*". No primeiro caso torna o contradomínio igual a $\mathbb{N} - \{9\}$, e, no segundo caso transforma a lei da função. O aluno PEIXE prefere trocar o domínio de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$. Não utiliza para isto qualquer justificativa.

O objetivo dos alunos para descaracterizar uma função parece ter seguido o caminho da não satisfação das condições de existência e unicidade da função. Para efetivar suas idéias utilizam estratégias diferentes. Enquanto o aluno GATO prefere modificar o contradomínio e a lei de formação da função, o aluno PEIXE prefere alterar o domínio da função, mesmo que não represente, segundo o colega, a verdadeira situação do problema. Ao aplicar o conceito de função os alunos utilizam explicitamente os conceitos de domínio, contradomínio, regra ou lei de formação, condição de existência e condição de unicidade.

Para caracterizar uma função todos esses conceitos são fundamentais. Porém, para descaracterizá-la, a idéia essencial para os alunos é atingir os conceitos de condição de existência e unicidade, de tal forma que não sejam satisfeitas. Para isso, eles preferem ressignificar o contradomínio, a lei de formação ou o domínio da função.

6.5. Intervenção 22 – A auto-avaliação e a ressignificação do conceito de função

Esse encontro acontece em 09/10/07 com duração de 60 minutos. São apresentados aos alunos as informações sobre o conceito de função de Lages Lima (1998) e os mapas conceituais dos grupos GATO e PEIXE desenvolvidos na intervenção 17.

A auto-avaliação inicia com a entrega dos questionários teórico e aplicado, respondidos antes das intervenções. Depois da leitura do material, cada aluno tem a oportunidade de alterar os conceitos que desenvolveram inicialmente. No momento final é proposta uma reflexão do processo vivenciado pelo grupo, diante do reconhecimento dos aspectos positivos e negativos do processo de ressignificação do conceito de função. Os objetivos desta intervenção são verificar as reformulações conceituais dos alunos e a descrição dos comentários finais sobre a evolução pessoal na pesquisa.

Ao receberem o questionário teórico respondido individualmente por cada integrante do grupo, vários são os comentários. O aluno GATO e o aluno PEIXE afirmam que gostariam de alterar todas as definições teóricas que desenvolveram. Durante a leitura, eles mesmos tecem suas próprias críticas: "*Como eu pude escrever uma coisa dessas?*", "*Está tudo errado... posso modificar?*", "*Eu não sabia nada do que estava escrevendo*". Socializam as respostas com o grupo, mas cada aluno só visualiza suas propostas respostas considerando-as "absurdos" conceituais.

Como o tempo do encontro não permite que os alunos realizem todas as modificações desejadas, é solicitado que alterem os conceitos que, em sua opinião, apresentam mais falhas, ou que lhes são mais pertinentes.

- **O Conceito de Função**

Os alunos optam por alterar primeiramente o conceito de função. No questionário teórico o aluno GATO escreve que: "*função é uma relação que ocorre geralmente entre dois conjuntos que utiliza uma característica para relacionar os elementos desses conjuntos*". Com a alteração conceitual, seu conceito de função fica escrito da seguinte forma: "*função é uma relação que diz como associar um elemento x* $\in$ *X a um elemento y* $\in$ *Y.*" Considera-se que o conjunto X representa o domínio da função e o conjunto Y, seu contradomínio.

O aluno PEIXE, no questionário teórico, escreve que: "*função matemática é uma relação entre dois números, onde um dos números é obtido a partir do outro*". Com a alteração conceitual, o conceito de função do aluno PEIXE fica escrito da

seguinte forma: "*função matemática é uma relação entre conjuntos. Essa relação se dá por meio de uma regra, e esta, deve obrigatoriamente obedecer a seguinte condição:* $\forall x \in D, \exists! y \in CD$ *"*. Considera-se que o conjunto D representa o domínio da função e o conjunto CD, o contradomínio.

Lages Lima (1998) refere-se a este conceito como uma regra que diz como associar um elemento do conjunto domínio a um elemento do conjunto contradomínio. Os alunos trazem elementos dessa definição, mas não a definição literalmente igual a apresentada pelo autor. Como afirma Ausubel, Novak e Hanesian (1980), após o contato do subsunçor com o novo conhecimento, ambos se modificam e carregam consigo seus elementos próprios e os elementos modificados.

Quando o aluno GATO afirma que função é uma relação que diz como associar elementos entre conjuntos, traz consigo o que pensava na fase inicial da pesquisa, que função é uma relação entre conjuntos e incorpora o conceito de Lages Lima (1998). No caso do aluno PEIXE, a transformação apresenta um acréscimo de mais elementos. Destaca que função é uma relação entre conjuntos que obedece a uma regra e às condições de existência e unicidade.

O conceito de Lages Lima (1998) parece ter-se incorporado ao subsunçor de tal forma que o conceito de função vinculado à relação entre números, existente previamente em sua estrutura cognitiva, transforma-se e amplia-se para a relação de vários números que compõem um conjunto. Diante do princípio da Assimilação preconizado por Ausubel, Novak e Hanesian (1980), é possível que, no caso do aluno GATO, o processo de assimilação obliteradora tenha se iniciado. O esquecimento de elementos do novo conhecimento, segundo este autor, é a garantia para que o novo conhecimento seja ancorado ao subsunçor, ampliando, dessa forma, o significado do conceito estudado.

É possível que, pelo fato deste aluno não ter evidenciado o conceito de regra, nem as condições de existência e unicidade da função, esses conceitos já tenham sido incorporados ao conceito de função de tal forma que não seja mais necessário explicitá-los, pois falar sobre função e sobre tais conceitos se torna redundante. Com o aluno PEIXE, esse processo talvez ainda não tenha se iniciado, pois precisa evidenciar os conceitos de regra e de condição de existência e unicidade ao definir o conceito de função. Ainda assim, é importante perceber que os alunos não memorizam o conceito,

mas utilizam tanto seus conhecimentos prévios quanto os novos conhecimentos para ressignificá-lo.

- **Os conceitos de domínio e contradomínio**

Os conceitos de domínio e contradomínio são aqueles que os alunos optam por modificar logo em seguida. O aluno GATO modifica apenas o conceito de domínio. No questionário teórico este aluno escreveu que domínio "*é um dos conjuntos do qual a função faz parte no caso os conjuntos que contém os elementos que se relacionam com o outro*". Considera sua resposta difícil de compreender, pois não esclarece qual é o conjunto. Assim apresenta uma nova definição para o conceito de domínio "*é o conjunto que contém a variável independente, logo se considerarmos f: A → B, o conjunto A seria o domínio, pois é nele que está os elementos que se ligam ao conjunto B pela função*".

O aluno PEIXE, no questionário teórico escreveu que "*domínio de uma função representa os valores que o número x pode assumir*". Modifica o conceito escrevendo que "*domínio de uma função representa o conjunto formado pelos valores que a variável independente pode assumir*". Os alunos associam o conjunto domínio ao conceito de variável independente. O mesmo não pode se dizer em relação ao conceito de contradomínio, pois apenas o aluno PEIXE o vincula ao conceito de variável dependente.

O aluno GATO opta por não modificar o conceito de contradomínio. Continua a pensar este conceito como apresentou no questionário teórico, contradomínio "*é o conjunto que contém os elementos que podem ser relacionados com o domínio da função*". O aluno PEIXE pensa diferente. No questionário teórico escreveu que "*contradomínio de uma função representa os valores que o número f(x) pode assumir*". Modifica-o incluindo o conceito de variável dependente da seguinte forma: "*o contradomínio de uma função representa o conjunto formado pelos valores que a variável dependente pode assumir*". Para o aluno PEIXE, a relação entre domínio e variável independente, e, contradomínio e variável dependente está explícita. Para o aluno GATO esse fato não acontece.

Relacionar o domínio da função à variável independente é um processo natural. O problema se encontra na relação que se pode estabelecer entre os conceitos de contradomínio e variável dependente. A resistência em estabelecer essa relação vem

persistindo desde a Fase 1 da pesquisa. Uma investigação mais profunda sobre o estabelecimento dessa relação pode ser realizada posteriormente.

Percebe-se que não há necessariamente, neste caso dos conceitos de domínio e variável independente, uma modificação conceitual, mas uma modificação na relação existente entre ambos os conceitos. As idéias principais continuam as mesmas. O domínio definido como um conjunto fundamental da função e a variável independente como uma variável à qual podem ser atribuídos quaisquer valores são as definições gerais apresentadas pelos alunos. A partir da nova relação, os valores assumidos pela variável independente não podem ser quaisquer de uma forma geral, mas quaisquer, dentro dos limites do conjunto domínio.

- **Representação na forma de conjuntos**

O aluno GATO opta por não fazer alterações na primeira parte do questionário aplicado que tratava da relação entre dois conjuntos. O aluno PEIXE, por sua vez, modifica apenas o que considerou como variável e suas derivações: variável dependente e independente. Considerou que a função da situação A (figura 8) seria a única opção a representar a função $f : X \to Y$, cuja lei de formação se apresentava como

$$f(k) = \begin{cases} 2, & se \quad k = vogal \\ 4, & se \quad k = consoante \end{cases}.$$

No questionário aplicado, o aluno PEIXE considerou que as variáveis representam "*os elementos do domínio porque são os elementos do domínio que variam para definir a sua imagem*". Modifica sua resposta considerando que "*a letra k é uma variável, k está variando no conjunto X*". O aluno prefere, portanto, explicitar quem é essa variável, porque, é somente neste momento que consegue visualizar a letra k como variável. Por outro lado, não faz qualquer menção sobre o papel de f(k), já que também poderia ter considerado f(k) como variável.

No questionário aplicado afirma que a variável independente é representada pela variável "k" e que não há uma variável dependente. Essa idéia se modifica ao longo das intervenções e escreve no protocolo que a variável independente continua sendo a letra "k". A variável dependente passa a existir e é considerada como "*a função f aplicada no valor k*", ou seja, f(k).

- **Representação na forma algébrica**

Diante das possíveis representações algébricas para a função $v:\Re \rightarrow \Re$, o aluno GATO considerou que x + y = 10 é a melhor representação da função porque relaciona x e y numa equação. Nesta intervenção, o aluno continua com essa compreensão sobre a situação proposta e desenvolve as modificações apenas na composição dos elementos da função.

No questionário aplicado, este aluno considerava que a função é composta por variáveis e incógnitas, pois, em sua opinião, esses dois conceitos apresentam o mesmo significado. No decorrer das discussões transforma essa idéia e passa a considerar incógnitas e variáveis como elementos que apresentam conceitos diferenciados. No caso da função, as letras x e y passam a ser caracterizadas como variáveis e não mais como incógnitas. Associa as variáveis às funções e às expressões algébricas. As incógnitas são associadas às equações.

O aluno PEIXE não altera as respostas do questionário aplicado para a representação algébrica da função $v:\Re \rightarrow \Re$. Continua a considerar que a expressão x + y representa uma função. Neste caso, não é possível compreender a resposta apresentada por este aluno. Ao atualizar o conceito de função, utiliza os conceitos de domínio, contradomínio, regra e condição. Sabe-se que considera algebricamente uma equação como representante de uma regra da função. Assim, a expressão x + y não sendo representante de uma equação, como poderia representar uma função?

É possível que o aluno não tenha percebido a contradição entre o conceito teórico e sua aplicação devido a diversos fatores, entre eles cansaço do final do semestre letivo. Ainda assim, essas explicações são meras conjecturas e o fato do aluno não ter alterado a resposta do questionário aplicado oficial fica sem explicação.

Ao final do processo de avaliação dos questionários o aluno GATO se pronuncia. Comenta que para ressignificar os conceitos utiliza os mapas conceituais e as definições formais. Acrescenta que, ainda tem dúvidas sobre a diferença entre variável e incógnita. Considera também que a leitura dos questionários respondidos há tanto tempo revelam sua evolução e não acredita que ele mesmo respondeu às questões da maneira como foi feito.

- **Reflexões finais**

Neste momento final da pesquisa, é proposto aos alunos que falem sobre os momentos bons e ruins vivenciados durante todo o processo interventivo. É comentado sobre a liberdade de expressão, sem críticas que possam inibir o pensamento. O aluno

GATO inicia o processo afirmando que gostaria de aprender a escrever melhor, saber como colocar as palavras no papel de forma mais adequada. Comenta que às vezes tinha todas as idéias organizadas na mente, mas colocá-las no papel é mais difícil. Afirma que saber o significado do conceito é uma coisa, mas convencer o colega sobre esse significado é bem diferente. O aluno PEIXE aproveita o momento e confessa que não gosta muito de escrever. Mas que escrever é necessário, as pessoas, inclusive ele, devem saber.

Outro aspecto apresentado pelo aluno GATO é o fato de ter desenvolvido o raciocínio dos problemas no quadro da sala de aula, atuando como se fosse um professor. Afirma que essa situação foi um pouco traumática. Todas as dúvidas que pairavam em sua cabeça o acompanharam durante a resolução dos problemas. Classifica a situação como "*horrível, horrível, horrível*". O aluno PEIXE afirma que também ficou um pouco "perdido" quando foi ao quadro, afirmou ser mais fácil pensar sentado na carteira do que pensar estando em evidência, na frente de todos.

O aluno GATO contribui com mais um elemento importante. Diz que, está acostumado, enquanto aluno, a sempre receber a resposta correta por parte do professor. Quando desenvolve um raciocínio errado, tem necessidade de ver a resposta correta. Nas intervenções, eles não têm acesso a esse comportamento por parte da pesquisadora. Isso gerou, em certos momentos, angústia. Queria ter uma resposta correta, mas a pesquisadora não fornecia, obrigando-os a chegar às conclusões sozinhos. Na realidade, essa situação o deixa frustrado. Nunca viveu um momento assim em relação à matemática. O aluno PEIXE considera esse aspecto diante de uma visão positiva. Afirma que aprendeu a conduzir o aluno a pensar, a colocar uma questão para o aluno resolver na lousa sem interferir diretamente em seu pensamento, deixando-o resolver de acordo com seus próprios conhecimentos.

O aluno GATO traz, a partir dessa discussão, outro elemento relevante. Afirma que na matemática, os professores não estão muito preocupados com os conceitos. Apresentam o conceito rapidamente e partem logo para os exercícios de forma mecânica. Os exemplos são feitos como modelo para que os exercícios sejam desenvolvidos pelo modelo acrescidos de poucos elementos.

Para finalizar, o aluno GATO afirma que o conceito de função está "menos bagunçado" em sua mente. Ainda não está completamente organizado. Afirma ter gostado de estudá-lo de forma mais aprofundada. O aluno PEIXE considera as provas matemáticas para a verificação das condições da função o aspecto mais importante do

processo interventivo. Afirma que finalmente compreendeu o que é uma prova matemática por absurdo e como utilizá-la para provar que uma relação é uma função.

Na fase de aplicação do conceito de função, os alunos utilizam os conceitos de Lages Lima (1998) atribuindo-lhes significado. Assim, o conceito de regra e a determinação de suas variáveis iniciam os processos de construção de padrões para os problemas propostos. Os conceitos de domínio e contradomínio determinam os limites para as variáveis, de acordo com as necessidades numéricas de cada problema. A satisfação das condições de existência e de unicidade traz para a relação estabelecida anteriormente entre as variáveis a característica de ser função.

Para que os alunos possam descaracterizá-la, optam geralmente por modificar o conjunto contradomínio. Garantem que a condição de existência não seja satisfeita. A modificação da lei de formação é utilizada para que a condição de unicidade também não seja satisfeita.

O processo de aplicação do conceito de função, na resolução de problemas, acontece de forma bastante dinâmica. Enquanto, em determinado momento, os alunos acreditam ter respondido adequadamente aos questionamentos propostos, compreendem, em outro, erros e falhas no processo. Prosseguir a criação da função faz com que eles reflitam sobre cada conceito discutido, nas fases 1 e 2 da pesquisa. De acordo com Ausubel, Novak e Hanesian (1980), a aplicação de conceitos em situações práticas é uma das formas mais eficientes de se verificar se são bem compreendidos pelos alunos, se a eles são vinculados novos significados.

O processo de auto-avaliação contribui para que os alunos compreendam sua evolução, durante o processo interventivo. As alterações finais dos conceitos auxiliam na compreensão de que os conceitos, em suas estruturas cognitivas, não são simplesmente memorizados, mas significativamente mais duradouros, já que se utilizam de elementos subsunçores, conceituais, existentes na estrutura mental.

As reflexões dos alunos, sobre o período da pesquisa, contribuem para ratificar o apresentado sobre a formação do professor de matemática, na parte teórica deste trabalho. Na formação que não valoriza os conceitos e fornece respostas prontas aos alunos pode não possibilitar momentos de reflexão sobre os conhecimentos que os alunos trazem.

O desenvolvimento da autonomia intelectual do aluno não é simples, precisa ser iniciado o quanto antes. Os professores de matemática precisam ser formados adequadamente para a sala de aula, estar mais seguros não só de saberes, mas também

das possíveis dificuldades dos alunos, no processo de aprendizagem, mais especificamente, no conceito de função.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante dos problemas existentes na Formação de Professores e na Formação de Professores de Matemática, apresentados por Tardif (2002) e Mizukami (2006), Ponte (1992) e Garnica (1997), respectivamente, destacam-se principalmente a não aritculação entre as disciplinas pedagógicas e específicas da matemática, a falta de entrosamento entre as disciplinas que envolvam conhecimentos algébricos e geométricos, a pouca consideração dos conhecimentos prévios dos alunos, a visão do licenciando como um ser passivo e individual diante do conhecimento e a valorização da aprendizagem dos procedimentos matemáticos em detrimento da aprendizagem conceitual.

Em relação ao estudo do conceito de função, as dificuldades em sua compreensão são estudadas há mais de duas décadas com resultados revelados em pesquisas nacionais e internacionais. Dentre elas, a vinculação do conceito de função ao conceito de equação, o estabelecimento de relações de dependência entre variáveis e a compreensão de representações algébricas e gráficas, bem como suas transformações, são as dificuldades consideradas mais relevantes para o estudo que se apresenta neste trabalho.

Para os pesquisadores da área, o sólido conhecimento matemático que o licenciando deve adquirir se baseia não no armazenamento de informações, mas na forma de domínio conceitual. O licenciando pode desenvolver atitudes positivas diante dos conhecimentos matemáticos para que seja capaz de aproveitar a riqueza das possibilidades de conhecimento propiciadas pela escola.

Como sugere Garnica (1997), os alunos em formação devem estudar problemas de Matemática elementar por meio de metodologias alternativas nos primeiros semestres do curso. Para Faria (2006), esses alunos devem aprender Matemática diante dos conhecimentos que já dispõem. As situações de ensino precisam promover o conhecimento científico da Matemática e a compreensão de sua importância na educação básica. Ponte (1992) acrescenta que os processos de formação não podem ser concebidos como uma imposição de um conjunto de verdades, mas diante de uma atitude de respeito pelos participantes. A grande preocupação é permitir ao licenciando o questionamento de suas concepções diante do hábito de duvidar.

Formar o professor de profundo conhecimento em Matemática pode não garantir que ele esteja preparado para ensiná-la, especialmente para alunos da educação básica, que têm os primeiros contatos com a linguagem formal da Matemática. Torná-la abstrata, nos primeiros anos, pode causar danos à aprendizagem dos alunos. A formação de professores precisa ser repensada, reavaliada e reformulada, mesmo gradativamente, para que se possa garantir minimamente a formação do profissional capaz de ensinar porque, em sua formação, o processo de ensino-aprendizagem é valorizado.

A proposta elaborada para o desenvolvimento da pesquisa é composta por todos esses elementos citados. Ao promover um processo de reflexão e de posterior ressignificação do conceito de função, utilizando-se uma metodologia baseada na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, procura-se articular conhecimentos matemáticos e pedagógicos, por meio da valorização de seus conhecimentos prévios dos alunos, do estudo de conceitos matemáticos voltados para a educação básica, e do estímulo de uma participação ativa, reflexiva e questionadora, não só do conteúdo como também do processo que vivencia.

A primeira etapa da pesquisa, a etapa do Levantamento, ao analisar os conhecimentos prévios dos alunos sobre os conceitos de função e seus conceitos subjacentes, traz contribuições importantes a respeito do que os alunos compreendem sobre função. Na Entrevista (quadro 4) é possível perceber que os alunos trazem consigo, no mínimo, 4 anos de experiência na utilização das funções. Ainda assim os alunos se sentem inseguros ao defini-la.

Quadro 4 – Resumo das definições apresentadas pelos alunos GATO e PEIXE nas Entrevistas e nos Questionários

LEVANTAMENTO	ALUNO GATO	ALUNO PEIXE
ENTREVISTA	Relação entre conjuntos	Expressão algébrica
QUESTIONÁRIO TEÓRICO	Relação entre conjuntos	Relação entre dois números
QUESTIONÁRIO APLICADO CONJUNTOS	Relação que obedece à lei da função	Relação que obedece às leis da função
QUESTIONÁRIO APLICADO ÁLGEBRA	Relação entre variáveis numa equação	Variáveis numa expressão algébrica

Fonte: elaboração própria

É também possível compreender que os conhecimentos prévios dos dois alunos analisados neste trabalho não são idênticos, apresentam diferenças e similaridades entre si. Esses conhecimentos, caracterizadores dos subsunçores, estão vinculados aos conceitos de relação entre números e de relação entre conjuntos.

Os resultados obtidos nos Questionários (quadro 4) complementam os resultados obtidos nas Entrevistas e revelam as dificuldades e contradições apresentadas pelos alunos ao definirem os conceitos solicitados. Esses resultados denotam os subsunçores relativos ao conceito de função e evidenciam a necessidade latente de se desenvolver sua ressignificação.

A segunda etapa da pesquisa, a etapa da Intervenção, ao propor a descrição de como os alunos ressignificam o conceito de função e seus conceitos subjacentes, ao utilizar os Princípios Programáticos de Ausubel como instrumento metodológico e o princípio da Assimilação como instrumento de análise, apresenta não só o pensamento dos alunos para cada reflexão proposta, mas também uma forma inovadora de se trabalhar com o conceito de função em sala de aula.

Diante dos resultados obtidos, conclui-se que a aprendizagem dos alunos acontece de forma significativa diante do modelo proposto por Ausubel. A primeira comprovação advém do fato dos alunos apresentarem em suas estruturas cognitivas conhecimentos prévios sobre função. Esse fato pode ser comprovado pelos resultados obtidos na entrevista na qual revelam ter aprendido o conceito a partir da 8ª série (atual 9º ano). Os questionários também revelam que existem subsunçores do conceito de função em suas estruturas cognitivas, relacionados ao conhecimento numérico e sobre conjuntos.

A segunda comprovação é o fato do conceito de função, por ser um conhecimento fundamental da matemática conforme Rêgo (2000), Moura e Moretti (2003) e Campos (2004), pelo fato de relacionar diversos tópicos matemáticos, de auxiliar no desenvolvimento de técnicas de modelagem para as mais variadas ciências e por se tratar de um conhecimento central para o Ensino Superior, pode ser considerado um conhecimento significativo.

A terceira comprovação se revela diante da participação ativa dos alunos. Em todas as atividades propostas o objetivo dos participantes é de questionar e refletir profundamente sobre seus próprios conhecimentos e os do colega. Muitas vezes, as discussões extrapolam o ambiente de sala de aula e perduram mesmo sem a participação

da pesquisadora. Em sala de aula, os alunos trazem novas fundamentações para o conceito de função com idéias de diferentes autores.

Pelo fato desse processo se caracterizar como uma aprendizagem significativa ausubeliana, é possível afirmar que as interpretações e análises realizadas revelam que os alunos vivenciam as fases do princípio da Assimilação. É perceptível também que cada aluno o faz de uma maneira particular, baseada nos conhecimentos prévios que apresenta sobre o conceito de função (quadro 5).

Quadro 5 – Resumo das definições apresentadas pelos alunos GATO e PEIXE nas Intervenções

INTERVENÇÃO	ALUNO GATO	ALUNO PEIXE
DIRICHLET	Relação entre variáveis	Relação de dependência entre variáveis
LAGES LIMA E ÁVILA	Relação de correspondência entre conjuntos	Regra de associação de elementos de conjuntos
MAPAS CONCEITUAIS	Regra que diz como associar cada elemento do domínio a um único do contradomínio	Regra que associa elemento do domínio ao elemento do contradomínio
PROBLEMAS	Variável, Regra, Domínio, Contradomínio e Condições	
AUTO-AVALIAÇÃO	Relação que diz como associar um elemento do conjunto domínio a outro do contradomínio	Relação entre conjuntos com regra que obedece às condições

Fonte: elaboração própria

Durante o processo, subsunçores e novos conhecimentos sofrem alterações, ao mesmo tempo em que conservam elementos originais. Os alunos, em nenhum momento, escrevem o conceito de função idêntico aos de Dirichlet ou de Lages Lima, as respostas sempre são originais. O desenvolvimento de questionamentos e de reflexões permite, portanto, que o aluno desenvolva seu próprio conceito sobre função, sem a necessidade de memorizá-lo e com a possibilidade de utilização adequada na resolução e modelagem de problemas.

A utilização dos Princípios Programáticos de Ausubel auxilia no desenvolvimento de cada momento de intervenção, diante da fundamentação da ação pedagógica para o processo reflexivo da aprendizagem conceitual.

Diferenciar os conceitos abrangentes e específicos, bem como os específicos dos abrangentes, relacionados ao conceito de função não é uma tarefa simples de ser realizada, já que a proposta é o desenvolvimento da ressignificação de apenas um conceito. Ao selecionar e diferenciar os conceitos abrangentes e específicos e hierarquizá-los, a compreensão dos elementos conceituais se torna mais clara e as metas estabelecidas para o desenvolvimento de cada intervenção são estabelecidas com maior segurança.

Por meio desse processo é possível compreender como os alunos estabelecem a relação entre os conceitos de função e variável, as diferenciações entre os conceitos de função e expressão algébrica, e, função e equação. Nesse momento da intervenção, os alunos percebem que, apesar de uma equação ser composta por variáveis que se relacionam entre si, ela não se caracteriza como função porque essa relação não se submete às condições de existência e unicidade, necessárias para ser função. Percebem ainda que, apesar de existirem variáveis numa expressão algébrica, elas não se relacionam entre si.

A fase que utiliza os princípios da Diferenciação Progressiva e da Reconciliação Integradora é, pois, uma fase de comparações conceituais. Ao conhecerem as definições de todos os conceitos abordados, os alunos se tornam capazes de refletir e questionar seu próprio conhecimento sobre o tema, comparativamente com as definições apresentadas e as idéias dos outros colegas do grupo, assimilando novos conhecimentos sobre função.

O desenvolvimento dos mapas conceituais contribui com mais detalhes sobre como os alunos relacionam os conceitos específicos ao conceito mais abrangente de função, bem como, aos conceitos subjacentes. Essa fase da pesquisa é uma fase da organização conceitual por meio da visualização e da compreensão das relações conceituais.

Ela revela a ênfase atribuída às condições de existência e unicidade da função. Esse fato é comprovado porque em todos os mapas conceituais desenvolvidos pelos alunos GATO e PEIXE, as condições não se incorporam ao conceito principal, elas são destacadas e enfatizadas como um conhecimento relevante, que não deve ser esquecido.

Outro aspecto também importante revelado no momento do desenvolvimento dos mapas conceituais diz respeito à composição de uma função. Em alguns momentos, os alunos afirmam que função é uma relação entre domínio e contradomínio, em outros, afirmam que função é uma relação entre domínio e imagem. Essa constatação da

contradição se apresenta também nos protocolos escritos dessa fase. O conceito de imagem está vinculado ao conceito de conjunto o que fortalece a compreensão de que imagem é um subconjunto do contradomínio. É interessante, portanto, trabalhar com os alunos a compreensão de que imagem pode ser um conjunto, mas também pode ser um elemento existente no contradomínio, resultante da aplicação de cada elemento do domínio na função.

A fase da aplicação do conceito de função em problemas contextualizados é fundamental para a organização mental dos alunos ao trabalharem os conceitos estudados em situações hipotéticas, elucidando possíveis dúvidas, corrigindo erros que cometeram durante o processo. Esse é de fato um momento de consolidar o conhecimento, um momento que finaliza o processo de ressignificação do conceito de função.

Esse momento causa bastante "angústia" entre os alunos ao mesmo tempo em que se torna um desafio. Eles precisam, por si só, refletir sobre o problema apresentado, encontrar as variáveis, relacioná-las por meio de uma regra, determinar o domínio e o contradomínio dessa relação que caracterize o problema proposto e submeter essa relação ao teste das condições de existência e unicidade. Esse momento final da prova das condições é um momento que muitas vezes revela para o aluno se suas escolhas anteriores estão realmente corretas e adequadas ao problema. Esse processo vivenciado pelos alunos na fase da Consolidação se caracteriza como um processo dialético de reflexão e de aplicação dos conhecimentos adquiridos.

As dificuldades que os alunos apresentam ao ressignificar o conceito de função ratifica o que os pesquisadores estudam sobre o tema, sobretudo em relação à função constante, como denota as pesquisas de Akkoç e Tall (2002).

Os conceitos de variável, de incógnita e de equação são complexos e de difícil compreensão para os alunos. Por serem específicos e básicos para a compreensão não só do conceito de função, mas de outros conceitos matemáticos, sugere-se essa temática para novas pesquisas de formação de professores dessa área do conhecimento.

A elaboração e a aplicação de toda a pesquisa trouxeram contribuições para a compreensão dos alunos também para os aspectos pedagógicos. Em algumas intervenções, sobretudo na última delas, os alunos explicitam o quanto a forma de trabalho, ao estimular a reflexão com a utilização de constantes perguntas e nenhuma resposta pronta, auxilia no desenvolvimento mental do aluno. É importante notar que

não só o conceito de função é ressignificado, mas também a compreensão que apresentam sobre o ensino desse conceito.

Para a pesquisadora, a vivência de todo o processo também contribui de forma positiva. A separação dos papéis de professora e pesquisadora é inicialmente difícil de ser praticado, eles se misturam e se confundem. Compreender as diferenças entre os objetivos da pesquisa e do ensino esclarece não só o que precisa ser desenvolvido na pesquisa, mas também os objetivos do ensino enquanto professora. A formação como pesquisadora que se inicia com esse trabalho proporciona uma visão mais focada do que é ensinar, uma valorização dos conhecimentos que os alunos já trazem sobre matemática e uma compreensão da importância do desenvolvimento matemático conceitual.

A metodologia utilizada nas intervenções pode ser plenamente aplicada em sala de aula com vários alunos, apesar dos resultados focarem apenas a aplicação com dois alunos. Nesse caso, o professor pode dividir a sala de aula em grupos e desenvolver o trabalho do conceito de função, não necessariamente em 22 aulas como o apresentado neste trabalho, mas em um número menor de aulas utilizando os Princípios Programáticos de Ausubel em sessões mais curtas mas que contemplem os objetivos propostos.

Não se espera também que o professor utilize essa metodologia no desenvolvimento de todos os conceitos matemáticos, por uma questão de tempo e da obrigatoriedade de finalizar os conteúdos propostos para o ano letivo. É possível, porém, que o professor faça escolhas e opte pela utilização da metodologia proposta com conceitos que julgue fundamentais para a compreensão do aluno.

Outros questionamentos surgem durante a pesquisa. Se o licenciando do 1º semestre de formação conseguiu repensar o conceito de função e alterar sua compreensão, o que aconteceria com os alunos que terminam a Licenciatura em Matemática? De que forma a reflexão significativa do conceito de função pode influenciar a maneira como o professor ensina em sala de aula?

Pode-se também pensar na possibilidade de aplicação dessa mesma proposta juntamente com alunos de outras instituições, ou em turmas com um número maior de alunos e verificar como seria o comportamento dos alunos e seus processos mentais. Essas questões geram novas problemáticas em trabalhos posteriores, como forma de aprofundamento da proposta deste trabalho.

Pretende-se aplicar os conhecimentos adquiridos como uma nova proposta do desenvolvimento do ensino de função. O incremento dessa metodologia em cursos de extensão e de especialização na área de Educação Matemática pode contribuir para expandir a visão atual dos professores possibilitando-lhes, além da aprendizagem de novas ferramentas, como por exemplo, os mapas conceituais, o desenvolvimento de situações que lhe permitam valorizar os conhecimentos prévios dos alunos e os conceitos matemáticos, dentre eles, o conceito de função.

REFERÊNCIAS

AKKOÇ, H; TALL, D. The simplicity, complexity and complication of the function concept. In: (Ed.) **Proceedings of the 26th Annual Conference – PME 26.** v2. 2002. United Kingdom, p. 25-32.

ALMEIDA, F. C. de P.; SCALON, J. D. **Fatores determinantes no aprendizado de funções Matemáticas.** Belo Horizonte: Unincor, 2002.

ALMOULOUD, S. A.; MANRIQUE, A. L.; SILVA, M. J. F. da; CAMPOS, T. M. M. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação,** São Paulo, n. 27, p. 94 – 108, set./out./nov./dez. 2004.

ARTIGUE, M. Cognitive Difficulties and Teaching Practices. In: DUBINSKY, E. e HAREL, G. **The Concept of Function.** EUA: Concordia University, 1992, p. 109-132.

AUSUBEL, D. P; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia Educacional.** Rio de Janeiro: Interamericana, 1980 (2ª edição).

ÁVILA, G. Introdução à Análise Matemática. São Paulo: Edgard Blücher, 1993.

BARBOSA, E. P.; DARSIE, M. M. P. **Significados produzidos sobre o conceito de função Matemática: análise de uma trajetória da formação de professores de Matemática ao ensino fundamental.** II Simpósio de Pesquisa em Educação Matemática, 2003.

BIANCHINI, B.L.; PUGA, L. Z. **Função: Diagnosticando registros de representação semiótica.** 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Departamento de Matemática, PUC, São Paulo.

BLANCO, M. M. G. **A formação inicial de professores de Matemática: fundamentos para a definição de um curriculum.** In: FIORENTINI, D. (Org.) Formação de professores de Matemática: explorando novos caminhos, com outros olhares. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2003.

BRAGA, Ciro. **Função – a alma do ensino da Matemática.** São Paulo: Annablume; FAPESP, 2006.

BRITO, A. de J.; ALVES, F. T. O. **Profissionalização e saberes docentes: análise de uma experiência em formação inicial de professores de Matemática.** In: NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (Orgs.). A Formação do professor que ensina Matemática – perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

CAMPOS, T. M. M. Cursos de Licenciatura e desafios da formação de professores de Matemática. **VII EPEM – Encontro Paulista de Educação Matemática.** São Paulo, Junho, 2004.

CARNEIRO V. C.; FANTINEL P. C.; SILVA R. H. **Funções: significados circulantes na formação de professores.** Boletim de Educação Matemática. Rio Claro, ano 16, no. 19, p. 37-57, 2003.

CEARÁ. Lei no. 8.423, de 3 de fevereiro de 1966. Encampa a Faculdade Católica de Filosofia do Ceará, sob a denominação de Faculdade de Filosofia do Ceará, e dá outras providências. **Lex:** Arquivo Público do Estado do Ceará, Ceará, D.O. no. 9.309, p. no. 1037, 9 de fevereiro de 1966. Legislação Estadual.

CHARLOT, B. **Relação com o saber – formação dos professores e globalização.** São Paulo: Artmed, 2005.

COSTA, A. C.; THOMAZ NETO, M. O. **Uma análise dos conhecimentos de função de estudantes iniciantes do curso de Matemática.** VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, Universidade Federal de Pernambuco, 2004.

COTRET, S. R. **Une Etude Sur Lês Representations Graphiques Du Mouvement Comme Moyen D´Acceder Au Concept de Fonction ou de Variable Dependante**. Journal pour lês enseignants de mathematiques et de sciences physiques du premier cycle de l´enseignement secondaire. Petit X, n. 17, n. 5-27, 1988.

CYRINO, M. C. da C. T. **Preparação e emancipação profissional na formação inicial do professor de Matemática.** In: NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (Orgs.). A Formação do professor que ensina Matemática – perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto & aplicações**. Vol. 1. São Paulo: Ática, 2003.

DARLING-HAMMOND, L; BARATZ-SNOWDEN, J (Eds.). **A good teacher in every classroom.** The National Academy of Education Committee on Teacher Education. San Francisco, Ca: Jossey Bass, 2005.

DUBINSKY, E.; HAREL, G. The Nature of the Process Conception of Function. In: DUBINSKY, E. e HAREL, G. **The Concept of Function.** EUA: Concordia University, 1992, p. 85-106.

FARIA, P. C. de. **Atitudes em relação à Matemática de professores e futuros professores.** 2006. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

FERREIRA, A. B. H. **Míni Aurélio: o minidicionário da língua portuguesa**.Curitiba: Posigraf. 2004.

FERREIRA, A. C. **Um olhar retrospectiva sobre a pesquisa brasileira em formação de professores de Matemática.** In: FIORENTINI, D. (Org.) Formação de professores de Matemática: explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas, SP: Mercado das Letras, 2003.

GARNICA, A. V. M. Professor e professor de Matemática: das informações que se tem acerca da formação que se espera. **Revista da Faculdade de Educação.** São Paulo, v. 23, n.1-2, jan./dez., 1997.

GAUTHIER, C. **Por uma teoria da pedagogia: Pesquisas contemporâneas sobre o saber docente.** Ijuí, RS: Ed. da Unijuí, 1998.

GIOVANNI, J.R.; BONJORNO, J. R. **Matemática: uma nova abordagem: versão trigonometria**. Vol. 1. São Paulo: FTD, 2000.

GOWIN, D.B. **Educating**. Ithaca, N.Y.: Cornell University Press, 1981.

GUIMARÃES, V. S. **Formação de professores: saberes, identidade e profissão.** Campinas, SP: Papirus, 2005.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar 1: conjuntos e funções**. São Paulo: Atual, 2001.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Microdicionário de Matemática**. São Paulo: Scipione, 1998.

KIERAN, C. **Teaching and learning of school algebra**. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Cap. 7, 1992.

LAGES LIMA, E., CARVALHO, P.C.P., WAGNER, E.; MORGADO, A.C. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol. 1. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

LAROUSSE, C. **Dicionário da Língua Portuguesa**. São Paulo: Universo, 1992.

LASTÓRIA, A. C,; MIZUKAMI, M. G. N. **Construção de material instrucional como ferramenta para aprendizagens docentes.** In: MIZUKAMI, M. G. N; REALI, A. M. R. (Orgs.) Aprendizagem Profissional da Docência: Saberes, Contextos e Práticas. São Carlos: EdUFSCar, 2002.

LOPES, W. S. **A importância da utilização de múltiplas representações no desenvolvimento do conceito de função: uma proposta de ensino.** 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC, São Paulo.

MIZUKAMI, M. das G. N. **Aprendizagem da docência: conhecimento específico, contextos e práticas pedagógicas.** In: NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (Orgs.). A Formação do professor que ensina Matemática: perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

MEIRA, L. Aprendizagem e ensino de Funções. In: SCHLIEMANN, Analúcia (Org.). **Estudos em Psicologia da Educação Matemática.** 2 ed. Ampliada. Recife: Editora Universitária da UFPE, 1997.

MENDES, M. H. M. **O conceito de função: aspectos históricos e dificuldades apresentadas por alunos do segundo para o terceiro grau**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC, Rio de Janeiro, 1994.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem Significativa.** Brasília: UNB, 1999.

MOURA, M. O. de; MORETTI, V. D. Investigando a aprendizagem do Conceito de Função a partir dos conhecimentos prévios e das interações sociais. **Ciência & Educação**, São Paulo, v. 9, n.1, p 67-82, 2003.

NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. **A formação do professor que ensina Matemática: estudos e perspectivas a partir das investigações realizadas pelos pesquisadores do GT 7 da SBEM.** In: NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (Orgs.). A Formação do professor que ensina Matemática – perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

NAGLE, Jorge. **Educação e Sociedade na Primeira República.** Rio de Janeiro: DP&A, 2001.

NOVAK, J.D. Understanding the learning process and effectiveness of teaching methods in the classroom, laboratory and field**. Science Education**, p. 493-512,1976.

NUNES, A. I. L. **a Pesquisa no campo da formação continuada de professores: interrelacionando conhecimentos e cruzando caminhos.** In: CAVALCANTE, M. M. D.; NUNES, J. B. C.; FARIAS, I. M. S. de. Pesquisa em educação na UEVE: um caminho em construção. Fortaleza: Edições Demócrito Rocha, 2002.

OLIVEIRA, N. **Conceito de função: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem.** 1997. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Departamento de Matemática, PUC, São Paulo.

ONTORIA, A.;BALLESTEROS, A.; CUEVAS, C.; GIRALDO, L.; MARTÍN, I.; MOLNA A.; RODRIGUEZ, A., VÉLEZ, U. **Mapas Conceituais: uma técnica para aprender.** São Paulo: Edições Loyola, 2005.

PAIVA, M. A. V. Saberes do professor de Matemática: uma reflexão sobre a licenciatura. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, ano 9, n. 11, p. 95-104, edição especial: formação de professores, 2002.

PAIVA, M. A. V. ; FREITAS, R. Os mapas conceituais como instrumento de apoio à aprendizagem da Matemática. **Revista Sapientia**, Cesat- Serra, v. 1, n. 4, 2005.

PCNEM. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio).** Ministério da Educação: Secretaria de Educação Básica, 2000.

PELHO, E. B. B. **Introdução ao conceito de função: a importância da compreensão das variáveis.** 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC, São Paulo.

PIRES, C. M. C.; SILVA, M. A. da; SANTOS, R. C. dos. **Reflexões sobre a formação inicial de professores de Matemática, a partir de depoimentos de coordenadores do curso de licenciatura.** In: NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (Orgs.). A Formação do professor que ensina Matemática – perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PONTE, J. P. da. **Concepções dos professores de Matemática e processos de formação.** In: Educação Matemática – temas de investigação. Lisboa: SEM-SPCE, 1992.

PRAIA, J. F. **Aprendizagem significativa em D. Ausubel: Contributos para uma adequada visão da sua teoria e incidências no ensino.** III Encontro Internacional sobre Aprendizagem Significativa, Peniche, Portugal, 2000.

PROJETO REDIN (Recursos Digitais Interativos) EAD, Rio Grande do Sul: UFRGS, 2005, 9 p.

RÊGO, R. G. do **Um estudo sobre a construção do Conceito de Função.** 2000. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

RIBEIRO, R.P.; NUÑEZ, I.B. In: Fundamentos do Ensino-aprendizagem das ciências naturais e da Matemática: o novo ensino médio. **Pensando a aprendizagem significativa: dos mapas conceituais às redes conceituais.** Porto Alegre: Sulina, 2004, p. 201-225.

ROSSINI, R. **Saberes docentes sobre o tema função: uma investigação das praxeologias.** Tese (Doutorado em Educação Matemática), PUC, São Paulo, 2006.

SCHWARTZMAN, Simon; BOMENY, Helena Maria Bousquet; COSTA, Vanda Maria Ribeiro. **Tempos de Capanema.** São Paulo: Editora FGV, 2000.

SHULMAN, L. Those who understand: the knowledge growths in teaching. **Educational Researcher**. EUA, n. 15, p. 4-14, fev., 1986.

SIERPINSKA, A. In: The Concept of Function. **On understanding the notion of function.** EUA: Concordia University, 1992, p. 25-58.

SOARES, J. de B. **Dicionário de Matemática**. São Paulo: Hemus, 2005.

SODRÉ, U. Matemática Essencial – Ensino: Fundamental, Médio e Superior. Disponível em http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/expralg/expralg.htm acessado em 22/07/2007.

STAKE, R. E. **Investigación com estúdio de casos.** Madrid: Morata, 1998.

SZTAJN, P. O que precisa saber um professor de Matemática? Uma revisão da literatura americana dos anos 90. **Educação Matemática em Revista**. São Paulo, ano 9, n. 11, p. 17-28, abril, 2002.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional.** Petrópolis, RJ: Vozes, 2002.

TRINDADE, J. A. de O.; MORETTI M. T. **Uma relação entre a teoria histórico-cultural e a epistemologia histórico-crítica no ensino de funções: a mediação.** Zetetiké, Campinas, v.8, no. 13/14, p. 29-50, 2000.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ. Histórico. Apresenta a história da Universidade. Disponível em: < http://www.uece.br/php/view.php?setor=1&id=123> Acesso em: 27 de abril de 2007.

VALENTE, Wagner Rodrigues. A elaboração de uma nova vulgata para a modernização do ensino de Matemática: aprendendo com a história da Educação Matemática no Brasil. **Bolema,** São Paulo, n. 17, p. 40-58, 2002.

_____. Do engenheiro ao licenciado: subsídios para a história da profissionalização do professor de Matemática no Brasil. **Revista Diálogo Educacional,** Curitiba, v. 5, n. 16, p. 75-94, set./dez. 2005.

VIDAL, Diana Gonçalves; FARIA FILHO, Luciano Mendes. Reescrevendo a história do ensino primário: o centenário da lei de 1827 e as reformas Francisco Campos e Fernando de Azevedo. **Educação e Pesquisa,** São Paulo**,** v. 28, n. 1, jan./jun. 2002.

YIN, R. K. **Estudo de Caso – planejamento e métodos.** Porto Alegre: Bookman, 2005.

ZEICHNER, K. Tendências da pesquisa sobre formação de professores nos Estados Unidos. **Revista Brasileira de Educação**, n.9, p. 76-87, 1998.

ZUFFI, E. M.; PACCA, J. L. A. Sobre funções e a linguagem Matemática de professores do Ensino Médio. **Zetetiké**, Campinas, v. 8, no. 13/14, p. 7-28, 2000.

_____. O conceito de função e sua linguagem para os professores de Matemática e de ciências. **Ciência e Educação**. São Paulo, v.8, n.1, p. 1-12, 2002.

APÊNDICES

Caderno de Apêndices e Anexos

ANEXOS

Caderno de Apêndices e Anexos